UDK 004.42

RAQAMLI MODELLASHTIRISH VA SPLAYNLAR

Behruz Ulug‘bek o‘g‘li Quvvatov
Osiyo xalqaro universiteti “Umumtexnik fanlar” kafedrasi o’qituvchisi
Tel: +998973236767,
E-mail: behruz.ulughbekovich.20@gmail.com

Annotatsiy:. Ushbu maqolada raqamli modellashtirishning asosiy tamoyillari va splaynlar yordamida modellashtirish usullari ko‘rib chiqiladi. Splayn interpolatsiyasi, silliqlash va differensial tenglamalarni yechishdagi afzalliklari tahlil qilinadi. Amaliy misollar yordamida splaynlarning texnik va ilmiy masalalardagi qo‘llanilishi ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: raqamli modellashtirish, splayn interpolatsiyasi, kubik splayn, silliqlash, differensial tenglamalar, numerik metodlar.

Аннотация: В данной статье рассматриваются основные принципы цифрового моделирования и методы моделирования с использованием сплайнов. Анализируются преимущества сплайн-интерполяции, сглаживания и решения дифференциальных уравнений. На практических примерах показано применение сплайнов в технических и научных задачах.

Ключевые слова: цифровое моделирование, сплайн-интерполяция, кубический сплайн, сглаживание, дифференциальные уравнения, численные методы.

Abstract: This article discusses the fundamental principles of digital modeling and modeling methods using splines. The advantages of spline interpolation, smoothing, and solving differential equations are analyzed. Practical examples demonstrate the application of splines in technical and scientific problems.

Keywords: digital modeling, spline interpolation, cubic spline, smoothing, differential equations, numerical methods.

Kirish

Zamonaviy ilmiy-texnik tadqiqotlar jarayonida real tizimlarning matematik modellarini yaratish va ularni raqamli kompyuter yordamida tahlil qilish zaruriyati mavjud. Raqamli modellashtirish — bu murakkab jarayonlar va tizimlarni matematik usullar orqali kompyuterda simulyatsiya qilishdir. Bu jarayonda ko‘p hollarda noaniq yoki diskret ma’lumotlar bilan ishlash talab etiladi. Shu nuqtai nazardan splayn funksiyalar — ya'ni bo‘lakli polinomlar — ma’lumotlarni interpolatsiya qilish, silliqlash va modellash uchun qulay vositadir. Dinamik tizimlarning matematik modellashtirilishi va ularni raqamli simulyatsiya qilishda splayn funksiyalarining ahamiyati yoritiladi. Splaynlar yordamida tizim holatlarini uzluksiz va silliq tarzda ifodalash hamda vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchan parametrlarni aniqlash usullari ko‘rib chiqiladi. Kompyuter grafikasi va geometrik

ISSN 3030-3907

modellashtirishda splaynlar, xususan B-splayn va NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) egri chiziqlari qanday ishlatilishi, ularning afzalliklari hamda amaliy qo‘llanilish sohalari tahlil qilinadi.

Splayn tushunchasi

Splayn — bu bir necha polynomial segmentlardan iborat, lekin ular orasida uzluksizlik va silliqlik (derivativlarning uzluksizligi) ta'minlangan egri chiziqdir. Asosan quyidagi turlari qo‘llaniladi:

- Lineyer splayn
- Kvadratik splayn
- Kubik splayn
- B-splayn (Basis splayn)

Afzalliklari:

- Egri chiziqni mahalliy nazorat qilish imkoniyati (har bir nuqtaning faqat ayrim segmentlarga ta'siri bor).
- Hosilalarning uzluksizligi.
- Hisoblashda barqarorlik.

Ko‘p hollarda **kubik splaynlar** ishlatiladi, ya'ni har bir intervalda uchinchi darajali polinomlar yordamida interpolatsiya amalga oshiriladi.

Kubik splaynlar quyidagi shartlarga javob beradi:

- Funksiya uzluksiz va silliq (1- va 2-tartibli hosilalari mavjud);
- Tugun nuqtalardagi qiymatlar ma’lumotlarga mos keladi;
- Chegara shartlari: tabiiy, klamped yoki boshqa turdagi shartlar.

Raqamli modellashtirishda splaynlarning roli

Interpolatsiya

Raqamli modellashtirishda aniqlangan nuqtalardagi eksperimental ma’lumotlar asosida uzluksiz model qurish kerak bo‘ladi. Bu holda splayn interpolatsiyasi yordamida diskret ma’lumotlar orasida uzluksiz, silliq funksiyani aniqlash mumkin.

Silliqlash

Eksperimental ma’lumotlar shovqinsiz bo‘lmaydi. Splayn silliqlash algoritmlari (masalan, penalizatsiyalangan splaynlar) orqali bu ma’lumotlar tahlil qilinadi va silliq model yaratiladi.

Differensial tenglamalarni yechish

Chiziqli va chiziqsiz differensial tenglamalarni raqamli yechishda splaynlar bazis sifatida ishlatiladi. Bu usulda yechim splayn funksiyalar orqali ifodalanadi va hatolik kamroq bo‘ladi.

Amaliy qo‘llanilish

Muhandislik

ISSN 3030-3907

Mexanik tizimlar, aerodinamika yoki issiqlik o‘tkazish modellarida splaynlar yordamida geometriyani yoki fizik parametrlarni uzluksiz ifodalash mumkin.

Tibbiyot

Biotibbiyot muhandisligi sohasida (masalan, EKG signalini analiz qilish) ma’lumotlarni silliqlash va modellashtirish uchun splaynlar ishlatiladi.

Grafik dizayn va vizualizatsiya

Kompyuter grafikasi va CAD (Computer-Aided Design) tizimlarida splaynlar egri chiziqlarni modellashtirishda qo‘llaniladi.

Splaynlar asosidagi algoritmlar

Kubik splaynni qurish uchun quyidagi bosqichlar bajariladi:

1. Tugun nuqtalari aniqlanadi: x0,x1,…,xnx_0, x_1, \dots, x_nx0,x1,…,xn;
2. Har bir bo‘lakda 3-darajali polinom koeffitsiyentlari topiladi;
3. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarning uzluksizligi ta’minlanadi;
4. Chegara shartlari qo‘llaniladi (tabiiy yoki klamped);
5. Chiziqli tenglamalar tizimi tuziladi va yechiladi.

Dinamik tizimlar tushunchasi

Dinamik tizim — bu vaqt o‘tishi bilan holati o‘zgaradigan tizimdir. Bunday tizimlar ko‘pincha differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Fizika, mexanika, iqtisodiyot va biologiyada dinamik tizimlar keng qo‘llaniladi.

Misollar:

- Moddalar almashinuvi tizimi (biologiya)
- Avtomobil harakatini modellashtirish (mexanika)
- Elektron zanjirlarning reaksiyasi (fizika)
- Inflyatsiya va foiz stavkalarining o‘zgarishi (iqtisodiyot)

Bu tizimlarni raqamli modellashtirishda asosiy maqsad — vaqt bo‘yicha ularning holatini bashorat qilishdir.

Simulyatsiyada splaynlarning o‘rni

Simulyatsiya — bu real tizimni matematik model orqali kompyuterda tajriba qilish jarayoni. Simulyatsiyada splayn funksiyalari quyidagi sabablarga ko‘ra keng qo‘llaniladi:

Holatlarni uzluksiz tasvirlash

Diskret vaqt nuqtalaridagi tizim holatini bilgan holda, splayn yordamida bu nuqtalar orasidagi harakat uzluksiz va silliq egri chiziq sifatida modellashtiriladi.

Ma’lumotlar asosida model qurish

Eksperimental yoki tarixiy ma’lumotlar asosida tizimning dinamik xatti-harakatini splayn interpolatsiyasi orqali aniqlash mumkin.

Tugallanmagan ma’lumotlarni tiklash

Ba'zi nuqtalardagi ma’lumotlar mavjud bo‘lib, oraliqdagi qiymatlar noma’lum bo‘lsa, splayn yordamida bu qiymatlar aniq prognoz qilinadi.

Vaqt bo‘yicha differensial yechimlarni splayn orqali soddalashtirish

ISSN 3030-3907

Ayrim differensial tenglamalarni yechishda, splaynlar yechimni taxminiy ifodalash uchun bazis sifatida ishlatiladi.

Amaliy misol: Tabiiy harorat o‘zgarishining simulyatsiyasi

Misol tariqasida, kunlik harorat o‘zgarishini 24 soat davomida modellashtirishni ko‘rib chiqamiz. Har bir soatda o‘lchangan harorat qiymatlari mavjud bo‘lsin:

Soat	**Harorat (°C)**
0	12
6	10
12	18
18	22
24	16

Kubik splayn yordamida bu nuqtalardagi haroratlar orasidagi o‘zgarishlar silliq funksiya bilan ifodalanadi. Bu funksiya asosida har qanday vaqt (masalan, 13:45 da) uchun bashorat qilinadigan qiymat olinadi.

Python yordamida amaliy yechim

Bu masalani Python tilida scipy.interpolate.CubicSpline kutubxonasi yordamida soddalashtirilgan tarzda yechamiz.

```
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicSpline
import matplotlib.pyplot as plt
# Soatlar (x) va ularning mos haroratlari (y)
x = np.array([0, 6, 12, 18, 24])
y = np.array([12, 10, 18, 22, 16])
# Kubik splayn interpolatsiyasi
cs = CubicSpline(x, y)

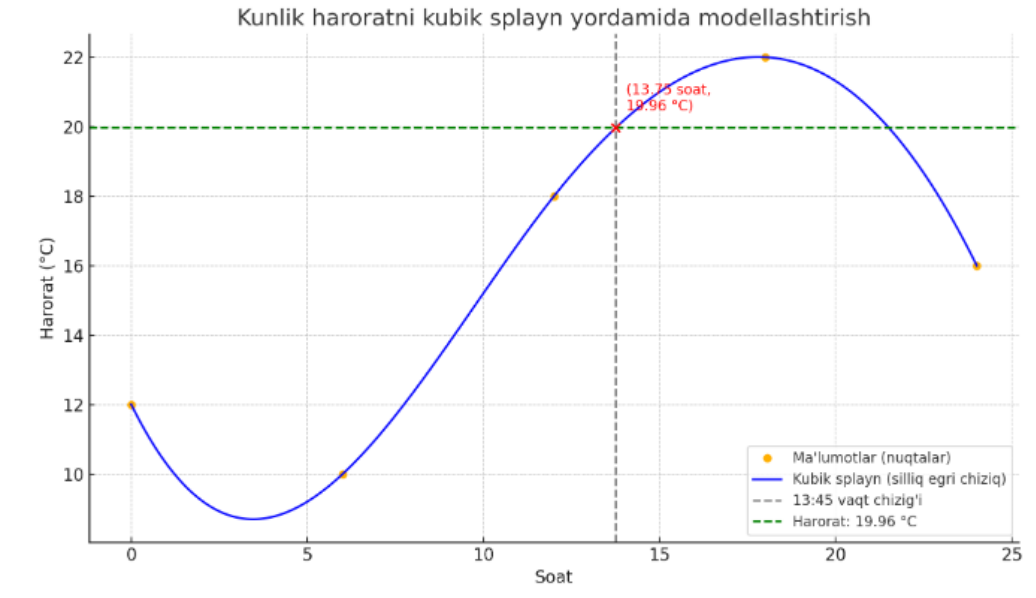
# Grafik chizish uchun yuqori aniqlikdagi nuqtalar
x_new = np.linspace(0, 24, 500)
y_new = cs(x_new)
# Bashorat qilish uchun vaqt (13:45 soat)
t = 13.45
predicted_temp = cs(t)
# Grafik chizish
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x, y, 'o', label="Ma'lumotlar (nuqtalar)")
plt.plot(x_new, y_new, label='Kubik splayn (silliq egri chiziq)', color='blue')
# Bashorat qilingan nuqtani chiziqlar bilan ko‘rsatish
```


ISSN 3030-3907

```
    plt.axvline(t, color='gray', linestyle='--', label='13:45 vaqt chizig\'i')  # Vertikal chiziq
plt.axhline(predicted_temp, color='green', linestyle='--', label=f'Harorat: {predicted_temp:.2f} °C')  # Gorizontal chiziq
plt.scatter([t], [predicted_temp], color='red', zorder=5)  # Nuqta (x, y)
# Koordinata yozuvi
plt.text(t + 0.3, predicted_temp + 0.5, f"({t} soat,\n{predicted_temp:.2f} °C)", color='red')
# Grafikning qolgan qismlari
plt.xlabel("Soat")
plt.ylabel("Harorat (°C)")
plt.title("Kunlik haroratni kubik splayn yordamida modellashtirish")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
# Natijani chiqarish
plt.show()
# Bashorat natijasini konsolga chiqarish
print(f"{t} soatda harorat taxminan: {predicted_temp:.2f} °C")
```

Natija

Misol uchun, chiqishi quyidagicha bo‘ladi:



1-rasm.

Grafikda:

- **Ko‘k chiziq** — kubik splayn yordamida olingan silliq harorat funksiyasi.
- **Qizil nuqta** — 13:45 da taxminiy harorat: **19,96 °C**.
- **Kul vertikal chiziq** — biz bashorat qilmoqchi bo‘lgan vaqt.

ISSN 3030-3907

Bu shuni anglatadiki, **kubik splayn yordamida** 13:45 vaqtda harorat taxminan **19,96 °C** bo‘lgan deb hisoblanadi.

Afzalliklari va samaradorligi

Ko‘rsatkich	**Splaynlar bilan simulyatsiya**
Uzluksizlik	Ha (1- va 2- tartibli hosilalar mavjud)
Hisoblash barqarorligi	Yuqori darajada
Amaliy ma’lumotlarga moslashuv	Yaxshi
Model soddaligi va aniqligi	Muvozanatli

Geometrik modellashtirish haqida umumiy tushuncha

Geometrik modellashtirish — bu ob'ektlarning shakl va hajmini matematik ifoda orqali kompyuterda tasvirlash usulidir. U sanoat dizayni, 3D animatsiya, avtomobilsozlik, arxitektura va tibbiy vizualizatsiya kabi ko‘plab sohalarda qo‘llaniladi.

Ko‘pincha murakkab egri chiziqli yuzalar yoki konturlarni ifodalash zarur bo‘ladi. Shu sababli, oddiy chiziq yoki parabola emas, balki moslashuvchanroq va aniqlik yuqori bo‘lgan egri chiziqlar — **splaynlar** va **NURBS** ishlatiladi.

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)

NURBS — bu B-splaynlarning umumlashtirilgan shakli bo‘lib, ular quyidagi xususiyatlarga ega:

- **Vaznlar**: Har bir nazorat nuqtasi o‘ziga xos og‘irlikka ega, bu esa egri chiziq shakliga sezilarli ta’sir qiladi.
- **Non-Uniform tugunlar**: Tugunlarning notekis taqsimlanishi orqali shaklga yanada ko‘proq moslashuvchanlik beradi.
- **Ratsional ifoda**: Polinom emas, balki ratsional funksiya orqali aniqlangan, bu esa konik shakllarni (aylana, elliptik yoylar) aniq ifodalash imkonini beradi.

NURBS tenglamasi (egri chiziq uchun):

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot \omega_i \cdot P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot \omega_i}, \quad u \epsilon [u_0, u_m]$$

Bu yerda:

- $C(u)$ — egri chiziqdagi nuqta,
- P_i — nazorat nuqtalari,
- ω_i — vaznlar,
- $N_{i,p}(u)$ — B-splayn asos funksiyalari,
- u — parametr.
- $u_0, \dots, u_m$ — tugun vektori.

NURBS va splaynlarning qo‘llanilishi

ISSN 3030-3907

Soha	Qo‘llanilish misoli
Kompyuter grafikasi	3D ob'ektlar yuzalarini yaratish
Avtomobil dizayni	Korpus, faralar, oynalar konturini aniqlash
Aviatsiya	Aerodinamik yuzalarni modellash
Tibbiyot	Ortopedik implantlar, stomatologik modellar
Animatsiya va o‘yinlar	Personajlar tana qismlarining harakatlanishi

Splaynlar va NURBS: Taqqoslash

Ko‘rsatkich	B-Splayn	NURBS
Vaznli nazorat	Yo‘q	Ha
Konik shakllarni ifodalash	Qiyin	Oson (aniq ifoda beradi)
Hisoblash murakkabligi	Nisbatan oddiy	Nisbatan murakkab
Moslashuvchanlik	Cheklangan	Yuqori

Misol: 2-darajali (kvadratik) NURBS egri chiziq

Ma'lumotlar:

Nazorat nuqtalari P_0, P_1, P_2:

- P_0 = (0,0)
- P_1= (1,2)
- P_2=(2,0)
- **Og‘irliklar (weights):**
  - $\omega_0 = 1, \omega_1 = 2, \omega_2 = 1$
- **Tugunlar vektori (knot vector):**
  - U=[0,0,0,1,1,1] → kvadratik (p = 2)

Maqsad:

- NURBS egri chiziqni chizish.
- Parametr $u\epsilon[0,1]$ bo‘yicha nuqtalarni hisoblash.

Python KODI: NURBS chizish

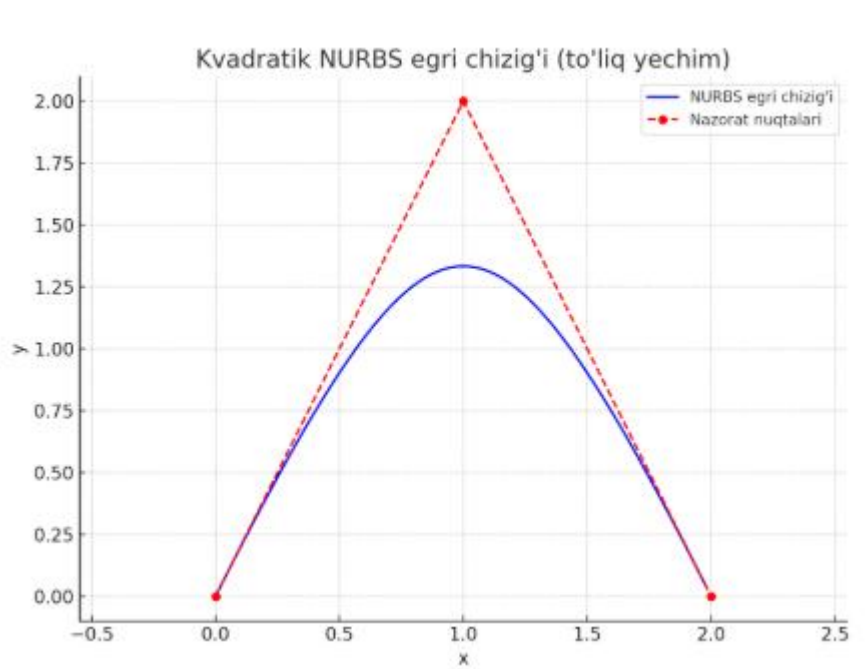
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import BSpline
# Nazorat nuqtalari (x, y)
P = np.array([
    [0.0, 0.0],
    [1.0, 2.0],
    [2.0, 0.0]
])
# Og'irliklar (weights)
w = np.array([1.0, 2.0, 1.0])
# Tugunlar vektori (knot vector)
```


ISSN 3030-3907

```
    knot_vector = [0, 0, 0, 1, 1, 1]
degree = 2  # Kvadratik splayn (p = 2)
# NURBS funksiyasini aniqlash
def NURBS(u_vals):
    C = []
    for u in u_vals:
        N = np.zeros(len(P))
        for i in range(len(P)):
            kv_segment = knot_vector[i:i+degree+2]
            if len(kv_segment) == degree + 2:
                try:
                    N[i] = BSpline.basis_element(kv_segment)(u)
                except:
                    N[i] = 0
            else:
                N[i] = 0
        R = w * N
        denominator = np.sum(R)
        if denominator != 0:
            numerator = np.dot(R, P)
            point = numerator / denominator
            C.append(point)
        else:
            C.append(np.array([np.nan, np.nan]))  # Avoid division by zero
    return np.array(C)
# Parametrlar oralig'i
u_vals = np.linspace(0, 1, 200)
curve_points = NURBS(u_vals)
# Grafik chizish
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(curve_points[:, 0], curve_points[:, 1], label="NURBS egri chizig'i",
color='blue')
plt.plot(P[:, 0], P[:, 1], 'ro--', label='Nazorat nuqtalari')
plt.title("Kvadratik NURBS egri chizig'i (to'liq yechim)")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
```


ISSN 3030-3907

```
    plt.tight_layout()
plt.show()
```



2-rasm

Yuqoridagi grafik **kvadratik NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)** egri chizig‘ining to‘liq yechimidir. Keling, bu natijani bosqichma-bosqich tahlil qilamiz:

Dasturda ishlatilgan elementlar:

1. Nazorat nuqtalari:

Bu nuqtalar egri chiziqning shaklini belgilaydi:

$P_0 = (0.0, 0.0)$

$P_1 = (1.0, 2.0)$

$P_2 = (2.0, 0.0)$

2. Og‘irliklar

$w_0 = 1.0$

$w_1 = 2.0$ (o‘rta nuqta, egri chiziq unga ko‘proq yaqinlashadi)

$w_2 = 1.0$

3. **Tugunlar vektori**

[0, 0, 0, 1, 1, 1]

4. Parametrlar oralig‘i:

Uchta nuqtani birlashtirish uchun $u \in [0, 1]$ oraliqda 200 ta nuqta hisoblab chiqilgan.

Natija:

- **Ko‘k egri chiziq** — bu NURBS egri chizig‘i.
- **Qizil nuqtalar** — nazorat nuqtalari.
- Egri chiziq markazdagi nuqtaga yaqinlashadi (og‘irligi katta bo‘lgani sababli).

ISSN 3030-3907

Xulosa

Splayn funksiyalar raqamli modellashtirishda kuchli vosita bo‘lib, interpolatsiya, silliqlash va differensial tenglamalarni yechish kabi jarayonlarda keng qo‘llaniladi. Splaynlar yordamida aniqlik yuqori bo‘lgan modellar qurish, ma’lumotlar asosida silliq funksiya yaratish va murakkab fizik jarayonlarni tasvirlash mumkin. Bu esa ilmiy tadqiqotlar va amaliy texnologik loyihalarda katta ahamiyat kasb etadi.

Dinamik tizimlarni modellashtirish va ularni kompyuterda simulyatsiya qilishda splayn funksiyalari muhim rol o‘ynaydi. Ular yordamida tizim holatini uzluksiz, silliq va realistik tarzda ifodalash imkoniyati paydo bo‘ladi. Ayniqsa, vaqtga bog‘liq tizimlarda splaynlar yordamida interpolatsiya qilish, tahlil o‘tkazish va prognozlash imkoniyatlari sezilarli darajada ortadi. Bu esa raqamli modellashtirishning aniqligini va ishonchliligini oshiradi.

Geometrik modellashtirishda splaynlar, xususan NURBS egri chiziqlari ob'ektlarning shaklini aniq va silliq tarzda ifodalash imkonini beradi. Ularning moslashuvchanligi, silliqlik darajasi va parametrik boshqaruv imkoniyatlari ularni CAD (Computer-Aided Design) va boshqa ilg‘or muhandislik sohalarida asosiy vositalardan biriga aylantirgan. Zamonaviy 3D modellashtirish dasturlari (Autodesk Maya, SolidWorks, Rhino) aynan NURBS texnologiyasiga asoslanadi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Burden, RL, Faires, JD Numerical Analysis , Brooks/Cole, 2011.
2. Shampin, LF Oddiy differensial tenglamalarning raqamli yechimi, Chapman & Hall, 1994 yil.
3. Quvvatov Behruz Ulug‘bek o‘g‘li. (2024). FRAKSIONAL HISOBLASHDAGI EYLER INTEGRALLARI VA MITTAG-LEFFLER FUNKSIYASI. IQRO INDEXING, 12(01), 9-14.
4. Behruz Ulugbek og, Quvvatov. "FUNDAMENTALS OF ALGORITHM AND PROGRAMMING IN MATHCAD SOFTWARE." Multidisciplinary Journal of Science and Technology 4.3 (2024): 410-418.
5. Quvvatov, B. (2023). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. UMUMLASHGAN TRAPETSIYALAR QOIDASI. Академические исследования в современной науке, 3(7), 137-142.
6. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. SIMPSON FORMULASI. Models and methods in modern science, 3(2), 223-228.
7. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. KLASSIK GAUSS KVADRATURALARI. Инновационные исследования в науке, 3(2), 94-103.

ISSN 3030-3907

8. Quvvatov, B. (2024, February). TORTBURCHAK ELEMENT USTIDA GAUSS–LEJANDR FORMULASI. In Международная конференция академических наук (Vol. 3, No. 2, pp. 101-108).

ISSN 3030-3907