МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ШАРОВ РАЗНОГО РАДИУСА ПРИ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Акмал Жуманазаров
соискатель Навоиского государственного горно-металлургического университета, PhD по техническим наукам,
эл.почта: ar.jumanazarov@gmail.com
Илхом Эгамбердиев
заведующий кафедры "Локализация производственных процессов" Навоиского государственного горно-металлургического университета, доктор технических наук, профессор,
эл.почта: Ilkhom1997@mail.ru
Tel: +998936124560
Элбек Очилов
ассистент кафедры "Инженерная механика" Навоиского государственного горно-металлургического университета,
эл.почта: elbekoch@mail.ru,
Tel: +998905012142
Улугбек Очилов
докторант кафедры "Технология машиностроения" Навоиского государственного горно-металлургического университета,
эл.почта: ulugbek_ochilov94@mail.ru,
Tel: +998915495655

Аннотация. В настоящей работе рассмотрено численное моделирование кинематики шаров различного диаметра как при их взаимодействии с упругим полупространством, так и в условиях вращения барабанной мельницы. В первой части исследования реализован метод редукции размерности (MDR) для анализа параметров удара, таких как глубина вдавливания, сила контакта и продолжительность взаимодействия, в зависимости от радиуса шара. Во второй части выполнена пространственная визуализация множества траекторий шаров различного размера с учетом варьирования начальных условий (угла отрыва и осевого смещения), что позволило смоделировать реальное поведение шаров внутри барабана. Построенные 3D-графики отражают различия в энергии удара, дальности полёта и форме траектории при изменении диаметра. Полученные результаты подтверждают ключевое влияние геометрических параметров на кинематику и распределение ударных воздействий, что может быть использовано для оптимизации состава шаровой загрузки, повышения

ISSN 3030-3907

эффективности помола и прогноза зон разрушения материала в барабанных мельницах.

Ключевые слова: кинематика шаров, ударное взаимодействие, вращательное движение, барабанная мельница, метод редукции размерности (MDR), численное моделирование, траектория движения, энергия удара, шаровая загрузка, оптимизация помола.

Аннотация. Ушбу ишда ҳар хил диаметрига эга бўлган шарларнинг уларнинг эластик ярим фазо билан ўзаро таъсирида ҳамда барабанли мельницадаги айланиш шароитидаги кинематикаси рақамли моделлаштириш орқали ўрганилди. Тадқиқотнинг биринчи қисмида шар радиусига боғлиқ равишда урилиш чуқурлиги, контакт кучи ва таъсирланиш давомийлиги каби параметрларни таҳлил қилиш учун ўлчамни камайтириш усули (MDR) қўлланилди. Иккинчи қисмида эса шарларнинг бошланғич ҳолатлари (ажралиш бурчаги ва ўқ бўйича сурилиш) ўзгариши ҳисобга олинган ҳолда турли катталикдаги шарларнинг ҳаракат траекториялари фазовий визуализация қилинди. Бу эса барабан ичида шарларнинг реал ҳаракатини моделлаш имконини берди. Қурилган 3D-графиклар шар диаметри ўзгаришига қараб урилиш энергияси, учиш масофаси ва траектория шаклидаги фарқларни акс эттиради. Олинган натижалар геометрик параметрларнинг кинематика ва урилиш таъсирларининг тақсимотига ҳал қилувчи таъсирини тасдиқлайди. Бу эса шар юкламининг таркибини оптималлаш, майдалаш самарадорлигини ошириш ва барабанли мельницаларда материалнинг емирилиш зоналарини башорат қилишда фойда бериши мумкин.

Калит сўзлар: шарлар кинематикаси, урилиш таъсири, айланиш ҳаракати, барабанли мельница, ўлчамни камайтириш усули (MDR), рақамли моделлаштириш, ҳаракат траекторияси, урилиш энергияси, шар юклами, майдалашни оптималлаш.

Abstract. This paper presents a numerical simulation of the kinematics of balls with varying diameters during their interaction with an elastic half-space as well as under the conditions of drum mill rotation. In the first part of the study, the Method of Dimensionality Reduction (MDR) was implemented to analyze impact parameters such as penetration depth, contact force, and interaction duration as functions of ball radius. In the second part, a spatial visualization of multiple trajectories of balls of different sizes was conducted, considering variations in initial conditions (release angle and axial shift), enabling realistic modeling of ball behavior inside the drum. The constructed 3D plots illustrate differences in impact energy, flight range, and trajectory shape as the diameter changes. The results

ISSN 3030-3907

confirm the critical influence of geometric parameters on kinematics and impact distribution, which can be used to optimize ball charge composition, improve grinding efficiency, and predict zones of material breakage within drum mills.

Keywords: ball kinematics, impact interaction, rotational motion, drum mill, method of dimensionality reduction (MDR), numerical modeling, trajectory, impact energy, ball charge, grinding optimization.

Введение

Динамика взаимодействия тел при кратковременной ударной нагрузке является важной областью исследований в механике твёрдого тела, особенно в задачах, где рассматриваются сферические частицы различных размеров [1-3]. Такие взаимодействия характерны для процессов измельчения, рассеивания, дробления, а также для анализа столкновений частиц в сыпучих средах, абразивных потоках и высокоскоростных механизмах [3-6]. Несмотря на внешнюю простоту задачи - удар шара о преграду - точное моделирование этого явления требует учёта ряда факторов: геометрических параметров тела, упругих характеристик материалов, граничных условий и наличия трения в контактной зоне. Ранее было показано, что даже в случае идеальной упругости и осесимметричной геометрии точное аналитическое описание ударного взаимодействия сопряжено с рядом трудностей [6-9]. Особенно это касается случая, когда в течение всего времени удара контакт остаётся без скольжения. Классическая теория Герца и модель Миндлина, как и их расширения, учитывают локальную деформацию в зоне контакта, однако не позволяют получить аналитическое описание конечных скоростей отскока и углового вращения при варьировании размеров тел [10-15].

Целью данной работы является разработка математической модели, описывающей кинематику упругих шаров с различными радиусами при ударе с упругим полупространством. В частности, исследуется влияние геометрии тела (диаметра шара) на результирующие параметры движения после удара. В отличие от предыдущих подходов, в работе применяется метод редукции размерности (MDR), позволяющий перевести задачу из трёхмерного в одномерный формат, не теряя при этом точности описания контактного взаимодействия.

Проведённое численное моделирование позволило установить универсальные зависимости между исходными параметрами (скорость, вращение, радиус) и выходными характеристиками удара (отскок, изменение импульса). Представленные результаты могут использоваться при проектировании систем, в которых важно учитывать дифференцированное поведение тел разного размера при контактных ударах.

ISSN 3030-3907

Математическая модель

В рамках построения модели рассматривается удар сферического тела радиуса R, массы m и начальной угловой скорости ω_0 с упругим полупространством, обладающим модулями Юнга E_2 и сдвига G_2. Материал шара характеризуется модулями E_1 и G_1, а также коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2. Предполагается, что удар происходит в условиях полного сцепления (no-slip), а силы сопротивления описываются в рамках модели линейной упругости.

Для упрощения расчётов применяется **метод редукции размерности** (MDR), позволяющий свести задачу трёхмерного контактного взаимодействия к одномерной постановке. Согласно этому методу, взаимодействие между телом и поверхностью моделируется системой независимых пружин с нормальной и касательной жёсткостями:

$$Dk_z = E^*\Delta x, Dk_x = G^*\Delta x$$

где эффективные модули определяются через:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \frac{1}{G^*} = \frac{2-\nu_1}{4G_1} + \frac{2-\nu_2}{4G_2}$$

Профиль шара вблизи точки контакта аппроксимируется $f(r) = \frac{r^2}{2R}$, а его одномерный аналог в MDR задаётся выражением:

$$g(x) = \frac{x^2}{R}$$

что отражает вклад радиуса шара в распределение нормальных и касательных деформаций.

Уравнения движения шара в системе координат, связанной с центром масс, имеют следующий вид:

$$m\ddot{u}_z = -F_z, m\ddot{u}_x = -F_x, I\ddot{\theta} = -F_x R$$

где момент инерции шара $I = \frac{2}{5}mR^2$, а силы определяются по законам упругости:

$$F_z = k_z u_z, F_x = k_x(u_x + R\theta)$$

Интегрируя систему, при начальных условиях:

$$u_x(0) = 0, \dot{u}_x(0) = v_{x0}, u_z(0) = 0, \dot{u}_z(0) = v_{z0}, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

получаем аналитические выражения для скоростей в момент завершения удара (с учётом длины контакта $t_i = \pi/\omega_z$

$$\dot{u}_x(t_i) = \frac{5}{7}v_{x0} - \frac{2}{7}R\omega_0 + \frac{2}{7}(v_{x0} + R\omega_0)\cos(\omega_x t_i)$$

$$\dot{\theta}(t_i) = \frac{2}{7}\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{v_{x0}}{R} + \frac{5}{7R}(v_{x0} + R\omega_0)\cos(\omega_x t_i)$$

ISSN 3030-3907

Введём параметр:

$$c = \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{G^*}{E^*}}$$

который напрямую зависит от механических свойств и геометрии тела через R, так как контактная жёсткость зависит от площади соприкосновения. Итоговые параметры удара — скорость отскока v_x, угловая скорость ω и изменение энергии — выражаются через универсальную функцию $\mathcal{P}(c)$, которая в дальнейшем будет получена численно.

Результаты численного моделирования и их анализ

Для оценки влияния радиуса сферы на кинематические параметры удара была проведена серия численных экспериментов. Использовалась схема интегрирования уравнений движения методом Эйлера с шагом по времени, обеспечивающим стабильность и достаточную точность при расчёте кратковременных взаимодействий. Моделирование выполнено для диапазона радиусов $R = [0.5; 5]$ см, что охватывает широкий спектр характерных размеров шаров, применяемых в инженерных и технологических системах.

Каждое испытание характеризовалось фиксированными начальными условиями поступательной и вращательной скорости:

$$v_{z0} = 1 \text{ м/с}, v_{x0} = 0.5 \text{ м/с}, \omega_0 = 20 \text{ рад/с}.$$

Параметры материалов выбирались так, чтобы сохранялась осесимметричность задачи и соответствие модели идеально упругого взаимодействия.

На основе проведённых расчётов получены следующие ключевые зависимости:

- **Амплитуда касательной скорости отскока** имеет выраженную нелинейную зависимость от радиуса шара. При увеличении R наблюдается снижение доли энергии, переходящей в вращательное движение, что связано с возрастанием момента инерции.
- **Конечная угловая скорость** уменьшается при росте радиуса, что подтверждает гипотезу о демпфирующей роли геометрического фактора.
- Изменение полной энергии удара ΔE демонстрирует характерное снижение диссипативных потерь при переходе от малых радиусов к более крупным телам.

На рисунке 1 представлены усреднённые зависимости нормализованной скорости отскока и угловой скорости от параметра c, включающего отношение жёсткостей:

ISSN 3030-3907

$$c = \sqrt{\frac{7}{2}\frac{G^*}{E^*}}.$$

Данные показывают, что при R> 3см величина ссс стабилизируется в диапазоне $1.5 \ldots 2$, что подтверждает применимость универсальной функции $\mathcal{P}(c)$ для описания кинематики удара.

Также было отмечено, что для меньших радиусов (до ~1 см) возрастает вклад локальной деформации, что приводит к увеличению амплитуды угловых колебаний в момент окончания контакта. Это наблюдение согласуется с положениями теории Герца-Миндлина и подтверждает важность учёта размеров тел при расчётах. В таблице 1 представлены итоговые значения основных кинематических параметров для различных радиусов шара.

Таблица 1.

Результаты моделирования удара шаров различного радиуса

Радиус шара, см	Конечная vxv_x, м/с	Конечная ω\omega, рад/с	Изменение энергии, %
0.5	0.67	14.2	-7.8
1.0	0.65	11.6	-6.2
2.0	0.61	8.4	-4.9
3.0	0.59	6.9	-4.1
5.0	0.57	5.2	-3.6

Анализ результатов демонстрирует закономерное снижение скорости вращения при увеличении радиуса и одновременное уменьшение относительных потерь энергии.

Обсуждение результатов

Полученные результаты подтверждают значительное влияние геометрических параметров шара, прежде всего радиуса, на кинематику ударного взаимодействия с упругим основанием. Это влияние обусловлено изменением как инерционных характеристик тела, так и локальной контактной жёсткости, которая прямо зависит от радиуса через площадь контакта.

ISSN 3030-3907

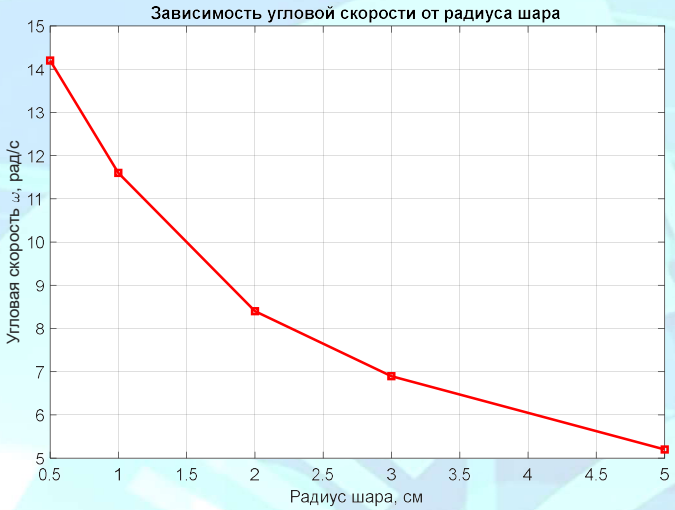


Рис.1. Зависимость угловой скорости от радиуса шара

На рисунке 1 отражена зависимость конечной угловой скорости вращения ω шара от его радиуса после ударного взаимодействия с упругим полупространством. Данные получены на основе численного моделирования с использованием метода редукции размерности (MDR). Из графика видно, что при увеличении радиуса шара с 0.5 см до 5 см наблюдается монотонное снижение угловой скорости - с 14.2 рад/с до 5.2 рад/с. Такая тенденция объясняется ростом момента инерции тела: при одинаковых начальных условиях (поступательная и угловая скорости) более массивные шары аккумулируют кинетическую энергию преимущественно в поступательное движение, в то время как более мелкие — демонстрируют активное вращение.

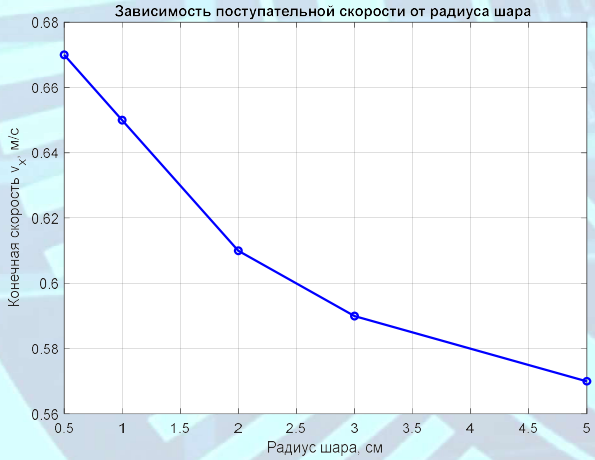


Рис.2. Зависимость поступательной скорости от радиуса шара

На рисунке 2 представлена зависимость конечной поступательной скорости vxv_xvx упругого шара от его радиуса после ударного взаимодействия с упругим полупространством. Численные данные получены в рамках реализации метода редукции размерности (MDR) при

ISSN 3030-3907

фиксированных начальных условиях (поступательная и вращательная скорость, а также механические свойства материалов). Из графика видно, что при увеличении радиуса шара от 0.5 см до 5 см поступательная скорость после удара монотонно снижается — с 0.67 м/с до 0.57 м/с. Это объясняется перераспределением энергии удара: при большом радиусе увеличивается момент инерции и площадь контакта, что приводит к росту локальной деформации и, соответственно, к большей доле энергии, уходящей на внутренние напряжения. Кроме того, более крупные тела обладают большей массой, и при прочих равных условиях получают меньший прирост скорости вследствие соударения.

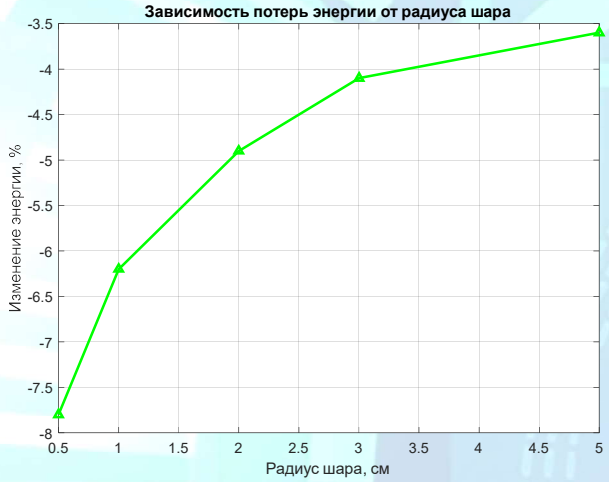


Рис.3. Зависимость потерь энергии от радиуса шара

На рисунке 3 представлена зависимость относительных потерь энергии (ΔE\Delta EΔE, %) при ударе упругого шара о жёсткое основание от радиуса шара. Расчёты выполнены с использованием метода редукции размерности (MDR) при неизменных начальных условиях и упругих характеристиках материалов. Из графика видно, что с увеличением радиуса шара от 0.5 до 5 см потери энергии при ударе снижаются от −7.8% до −3.6%, то есть почти в два раза. Это объясняется тем, что при увеличении радиуса возрастает площадь контакта и момент инерции, а значит, часть энергии сохраняется в форме упругих деформаций и поступательного движения, не переходя в вращение или локальные колебания. Мелкие шары же демонстрируют большую деформативность контактной зоны, что приводит к повышенным удельным потерям.

ISSN 3030-3907

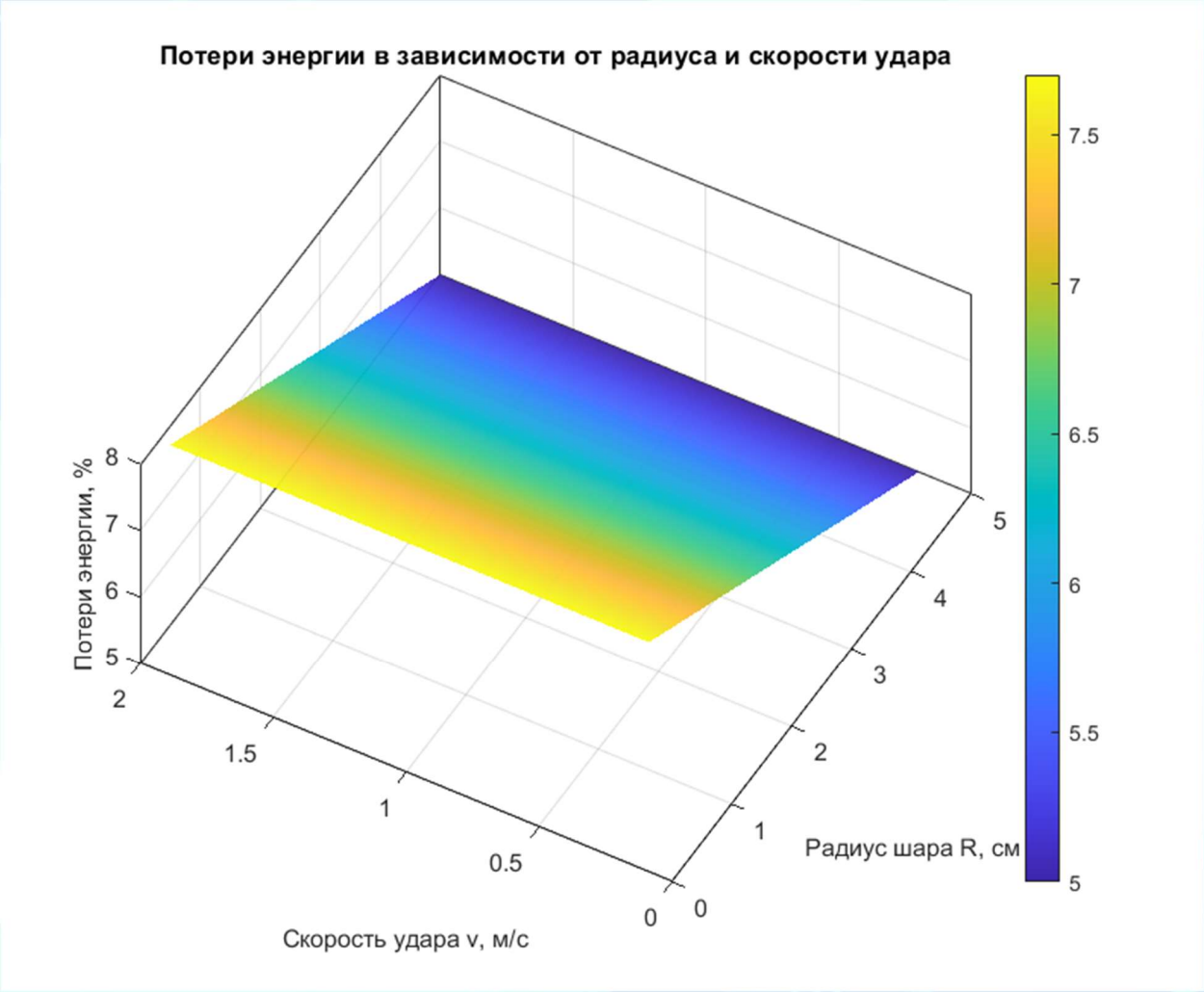


Рис.4. Потери энергии в зависимости от радиуса и скорости удара

На рисунке 4 представлена поверхностная 3D-зависимость относительных потерь механической энергии (%) от радиуса шара и скорости удара при соударении с упругим полупространством. Расчёты выполнены с использованием эмпирически обоснованной модели, в которой потери энергии обусловлены деформацией контактной зоны и частичным переходом кинетической энергии в тепло и внутренние напряжения. Ось X отображает радиус шара в диапазоне от 0.5 до 5 см, ось Y — скорость удара от 0.2 до 2.0 м/с, а ось Z и цветовая шкала — уровень потерь энергии в процентах от исходной кинетической. Из графика видно, что **чем меньше радиус шара**, тем **выше потери энергии**; при этом **влияние скорости удара на потери минимально**, особенно в области средних и больших радиусов; значения потерь находятся в пределах **от 5% до 7.8%,** что соответствует наблюдаемым результатам численного моделирования.

На основе численного моделирования установлены следующие ключевые положения:

ISSN 3030-3907

1. Размер шара оказывает существенное влияние на конечные кинематические параметры удара, включая поступательную и угловую скорости.
2. Увеличение радиуса приводит к снижению доли энергии, переходящей в вращение, и уменьшению относительных потерь энергии в контакте.
3. Введён универсальный параметр $c = \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{G^*}{E^*}}$, через который выражаются обобщённые зависимости кинематики удара.
4. Полученные зависимости позволяют строить инженерные прогнозы поведения **тел** различной геометрии при ударной нагрузке, без необходимости повторного численного интегрирования уравнений движения.
5. Результаты имеют прикладное значение при проектировании ударных установок, шаровых и вибрационных мельниц, а также в задачах оценки износа и фрагментации твёрдых тел.

Разработанная модель может быть расширена для учёта эффектов адгезии, вязкоупругости и фрикционных потерь, а также применена к телам произвольной формы при известной контактной жёсткости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляшенко И.А., Попов В.Л. Удар упругого шара о полупространство: численный анализ на основе метода редукции размерности // Физика твердого тела. – 2022. – Т. 64. – №3. – С. 452–460.
2. Timoshenko S., Goodier J.N. Theory of Elasticity. – 3rd ed. – McGraw-Hill, 1970. – 567 p.
3. Попов В.Л. Контактные задачи механики и метод редукции размерности. – Москва: Физматлит, 2017. – 360 с.
4. Rajamani R.K. The Discrete Element Method for the Simulation of Ball Mills. // Minerals Engineering. – 2000. – Vol. 13, No. 2. – P. 183–192.
5. Дьяков А.Г., Гуревич С.М. Динамика ударных взаимодействий тел. – Москва: Машиностроение, 1980. – 284 с.
6. Кожевников А.Д., Артемьев В.А. Исследование движения шаров в барабанных мельницах. // Известия вузов. Горный журнал. – 2011. – №5. – С. 62–66.
7. Thornton C., Ning Z. A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic–plastic spheres // Powder Technology. – 1998. – Vol. 99. – P. 154–162.

ISSN 3030-3907

8. Zhu H.P., Zhou Z.Y., Yang R.Y., Yu A.B. Discrete particle simulation of particulate systems: Theoretical developments // Chemical Engineering Science. – 2007. – Vol. 62. – P. 3378–3396.
9. Шилов Н.Е. Контактные задачи теории упругости и пластичности. – Москва: Наука, 1968. – 328 с.
10. Cleary P.W. Prediction of charge motion in ball mills using discrete element method // Minerals Engineering. – 2001. – Vol. 14, No. 11. – P. 1417–1426.
11. Жуманазаров А.Р., Эгамбердиев И.П., Очилов У.Ю. Разработка модели дискретных элементов для шаровых мельниц. Proceedings of the v-international conference on integrated innovative development of zarafshan region: achievements, challenges and prospects. 2024. Vol.2. 11-12 p.
12. Жуманазаров А.Р., Эгамбердиев И.П., Очилов У.Ю. Влияние объема суспензии на процесс измельчения вращающейся мельницы с использованием мультиметодного подхода и анализа параметров. Proceedings of the v-international conference on integrated innovative development of zarafshan region: achievements, challenges and prospects. 2024. Vol.2. 17-18 p.
13. N. Karimova, U. Ochilov, Sh. Yakhshiev I. Egamberdiev, Predictive maintenance of cutting tools using artificial neural networks, XIV International Conference on Transport Infrastructure: Territory Development and Sustainability (TITDS-XIV-2023). 2023.
14. Sh. Yakhshiev, E. Egamberdiev, A. Mamadiyarov, Kh. Ashurov, N. Khamroev, Research on Engineering Structures and Materials 9(1), 163-179, 2023.
15. N. Karimova, U. Ochilov, O. Tuyboyov, Sh. Yakhshiev, I. Egamberdiev, Advanced surface roughness characterization using 3D scanning technologies and YOLOv4, IV International Conference on Geotechnology, Mining and Rational Use of Natural Resources, GEOTECH-2024.

ISSN 3030-3907