SIGNALLARGA RAQAMLI ISHLOV BERISHDA XAARNING BO‘LAK POLINOMIAL USULLARI

Ibragimov Sanjarbek Salijanovich
Andijon davlat texnika instituti dotsenti, t.f.f.d. (PhD)
E-mail: sanjari07@yahoo.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada signallarga raqamli ishlov berish jarayonida Xaar ortogonal bazisiga asoslangan bo‘lak-polynomial usullarning matematik asoslari va amaliy ahamiyati tahlil qilingan. Xaar, Shauder va splayn bazislarida spektral koeffitsiyentlarni hisoblash algoritmlari taqqoslangan, ularning strukturaviy va hisoblash samaradorligini graf va formulalar asosida yoritilgan. Xususan, bo‘lak-o‘zgarmas, bo‘lak-chiziqli va bo‘lak-kvadratik bazislar uchun moslashtirilgan tez o‘zgartirish algoritmlarining ustunliklari, ularni amalga oshirishda yuzaga keluvchi muammolar va ularni yechish yo‘llari ko‘rsatib berilgan. Yuqori aniqlik va tezlik talab qilinadigan signallarni qayta ishlash tizimlarida Xaarning bo‘lak-polinomial usullari qo‘llanilishi mumkinligi ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: Xaar o‘zgartirishlari, spektral koeffitsiyentlar, Shauder bazisi, parabolik splayn, bo‘lak-polinomial usullar, raqamli signal.

Аннотация: В данной статье проанализированы математические основы и практическая значимость кусочно-полиномиальных методов, основанных на ортогональном базисе Хаара, в процессе цифровой обработки сигналов. Сравниваются алгоритмы вычисления спектральных коэффициентов в базисах Хаара, Шаудера и сплайнов, их структурная и вычислительная эффективность освещается с использованием графиков и формул. В частности, показаны преимущества адаптированных алгоритмов быстрого преобразования для кусочно-постоянных, кусочно-линейных и кусочно-квадратичных базисов, а также рассматриваются возникающие при их реализации проблемы и пути их решения. Установлена применимость кусочно-полиномиальных методов Хаара в системах обработки сигналов, требующих высокой точности и скорости.

Ключевые слова: преобразования Хаара, спектральные коэффициенты, базис Шаудера, параболический сплайн, кусочно-полиномиальные методы, цифровой сигнал.

Annotation: This article analyzes the mathematical foundations and practical significance of piecewise-polynomial methods based on the Haar orthogonal basis in digital signal processing. Algorithms for calculating spectral coefficients in Haar, Schauder, and spline bases are compared, and their structural and computational efficiency is demonstrated through graphs and formulas. Specifically, the advantages of fast transform algorithms adapted for piecewise-

ISSN 3030-3907

constant, piecewise-linear, and piecewise-quadratic bases are presented, along with the challenges encountered in their implementation and possible solutions. The applicability of Haar-based piecewise-polynomial methods in high-accuracy and high-speed signal processing systems is demonstrated.

Keywords: Haar transforms, spectral coefficients, Schauder basis, parabolic spline, piecewise-polynomial methods, digital signal.

Kirish

Raqamli signallarga ishlov berish zamonaviy axborot texnologiyalari va elektronika sohalarining ajralmas tarkibiy qismiga aylangan. Bu yo‘nalishdagi dolzarb muammolardan biri – signal tarkibidagi spektral xususiyatlarni aniqlash va ularni samarali qayta ishlashdir. Ayniqsa, tezkor ishlov berishni talab qiluvchi tizimlarda hisoblashlar sonini kamaytirish, operativ xotira sarfini optimallashtirish va algoritmik soddalik muhim ahamiyat kasb etadi [1,2]. Shu nuqtai nazardan Xaar ortogonal bazisiga asoslangan algoritmlar alohida o‘rin tutadi. Xususan, Xaarning bo‘lak-polynomial turlari – bo‘lak-o‘zgarmas, bo‘lak-chiziqli va bo‘lak-kvadratik bazislarda koeffitsiyentlarni hisoblash usullari signalni qismlarga ajratilgan tarzda tahlil qilishga imkon beradi.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Xaar bazislarining asosiy xususiyatlaridan biri spektral koeffitsiyentlarni aniqlash uchun tezkor algoritmlarning mavjudligidir. Tezkor algoritmlar signallarga raqamli ishlov berish jarayonida arifmetik amallar soni va xotira hajmini kamaytirish imkonini beradi. Natijada, signallarni raqamli ishlash uchun ortogonal bazislardan foydalanganda qayta ishlash tezligi oshishiga erishiladi. Signallarga raqamli ishlov berish uchun Xaar tez o‘zgartirish algoritmlari keng qo‘llaniladi [1, 3].

Diskret Fure-Xaar qatorini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} C_i har_i(x_n) \qquad (1)$$

Bu diskret o‘zgartirishlar $har_i(x_n)$-Xaar bazisi bo‘yicha C_n qiymatlarini o‘zgartirish asosida aniqlanadi. Spektral koeffitsiyentlarni hisoblash uchun quyidagi formulalardan foydalanamiz:

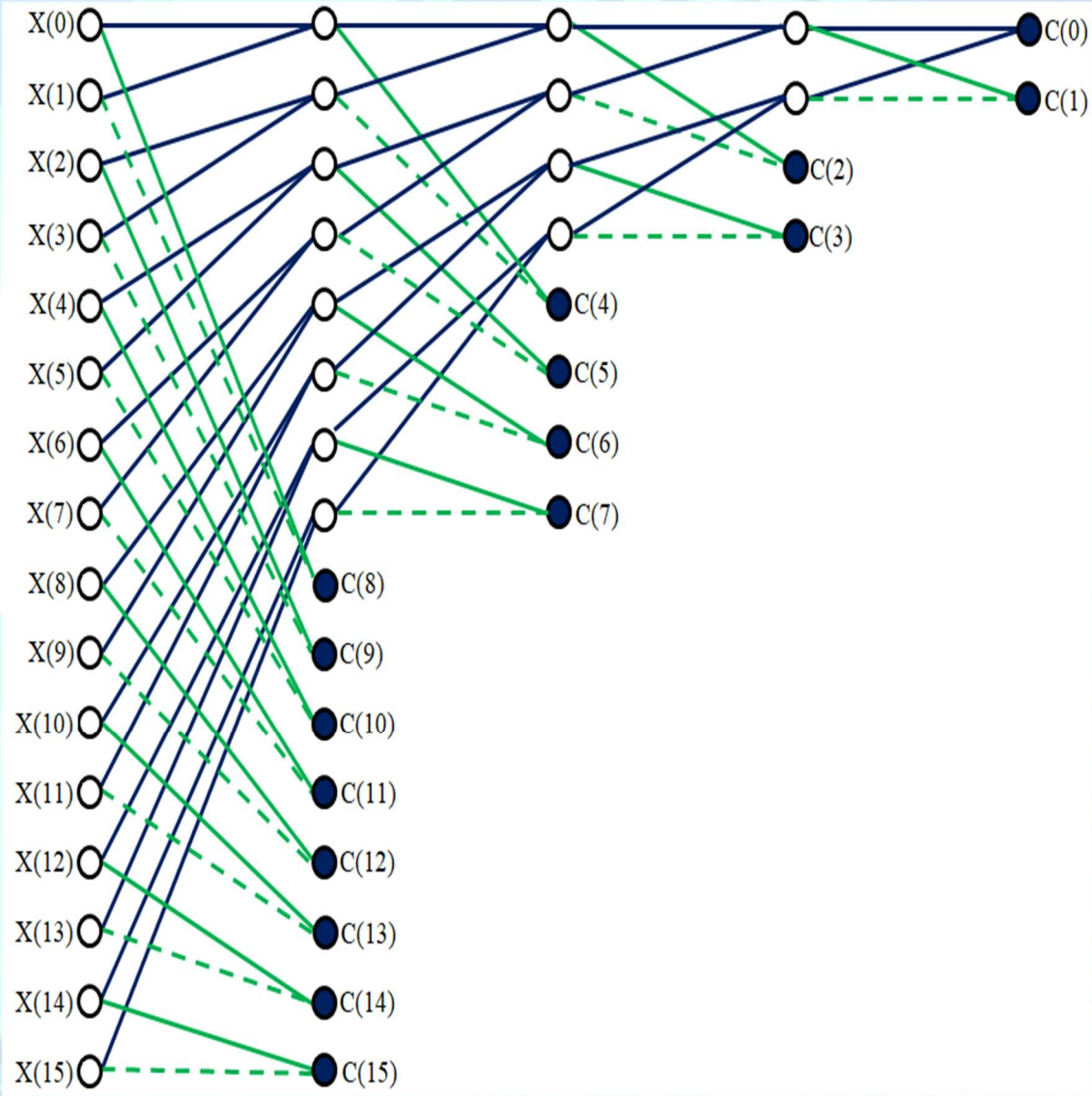
$$C_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X(i)\,,\ C_n = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} X(i) har_n(i) \qquad (2)$$

Xaar o‘zgartirishlarini samarali hisoblash uchun tezkor algoritmlar mavjud, va ular Xaar Tez O‘zgartirish (XTO‘) algoritmi deb ataladi.

XAAR TEZ O’ZGARTIRISH ALGORITMI

ISSN 3030-3907

Diskret Xaar o‘zgartirishlarni hisoblash uchun $N\log_2 N$ ta algebraik qo‘shish amali bajariladi. XTO‘ bo‘yicha bajarilishi kerak bo‘lgan algebraik amallar soni $2(N-1)$ ga teng bo‘ladi [1, 3, 6, 7]. Bu esa diskret Xaar o‘zgartirishi algoritmidagi algebraik amallar sonidan ko‘ra $0,5\log_2 N$ marta kamroq. Shuning uchun qator amaliy masalalarda raqamli signallarni qayta ishlash uchun XTO‘ algoritmidan foydalanganda unumdorlikni oshirishiga erishiladi.



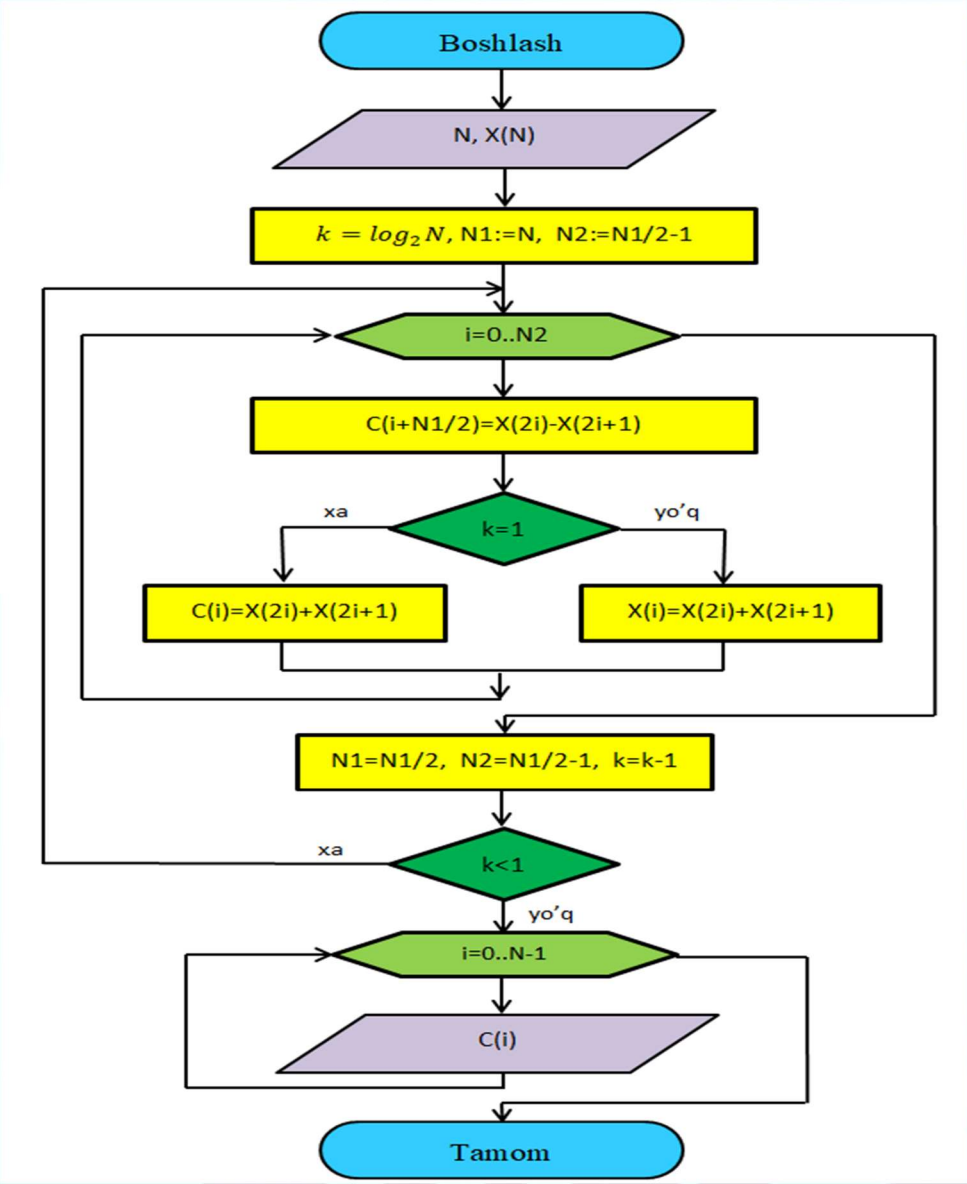
1-rasm. Endryus bo‘yicha Xaar tez o‘zgartirish grafi

Xaar koeffitsiyentlarini hisoblashning tezkor algoritmlari raqamli signal protsessorlarining asosiy xususiyatlariga mos keladi, chunki ularda qo‘shish va ayrish arifmetik amallari qo‘llaniladi. Signallar oqimini va hisoblashlar ketma-ketligini graf ko‘rinishida tasvirlash jarayonlarni ifodalash uchun yaxshi vositadir. 1-rasmda XTO‘ algoritmining Endryus tomonidan taklif qilingan grafi [3,6,7] tasvirlangan. Bu graflarda kiruvchi qiymatlar soni $N=16$ ga teng.

ISSN 3030-3907

Berilgan graflarda uzluksiz to‘g‘ri chiziqlar qo‘shish, uzlukli chiziqlar ayrish amaliga mos keladi. Kirish signallari $X(0),X(1),\ldots,X(N-1)$ lar bilan, natijaviy Xaar spektral koeffitsiyentlari $C(0),C(1),\ldots,C(N-1)$ lar bilan ko‘rsatilgan.

Yuqorida keltirilgan Endryus bo‘yicha XTO‘ grafi asosida spektral koeffitsiyentlarni hisoblash algoritmining blok-sxemasi quyidagi 2-rasmda tasvirlangan.



2-rasm. Endryus bo‘yicha Xaar tez o‘zgartirish algoritmining blok-sxemasi

Tez spektral o‘zgartirish algoritmi uchun qo‘yilgan talablar birinchi navbatda operatsiyalarning minimal soni, har bir operatsiyaning soddaligi va operativ xotira hajmini kam talab qilinishidan iborat.

Adabiyotlarda [1-6, 8] keltirilgan manbalardan foydalanib spektral koeffitsiyentlarni hisoblash uchun qo‘shish va ayrish amallar soni talab qilinishiga

ISSN 3030-3907

ko‘ra tez o‘zgartirish algoritmlarini solishtiramiz. UTO‘ algoritmida $N = 2^k$ sondagi massivga spektral ishlov berish uchun $k \cdot 2^k$ ta qo‘shish-ayrish amallarini talab qiladi, XTO‘ algoritmida talab qilingan amallar soni $2(N-1)$ ga teng, Xarmut tez o‘zgartirish algoritmida esa $3N-4$ sondagi amallarni talab qiladi. Bu yerda N -massiv elementlar soni, k-iteratsiya soni.

1-jadval

Bir o‘lchovli signallarga raqamli ishlov berishda tez o‘zgartirish algoritmlari uchun talab qilinadigan arifmetik amallar soni bo‘yicha taqqoslash jadvali

Massiv o‘lchami	Tez o‘zgartirish (TO‘) algoritm nomi			
	Fure TO‘	Uolsh TO‘	Xaar TO‘	Xarmut TO‘
N	kN	kN	2(N-1)	3N-4
1024	10240	10240	2046	3068

1-jadvalda Fure, Uolsh, Xaar va Xarmut tez o‘zgartirish algoritmlarida hisoblashlarni bajarish uchun talab qilinadigan arifmetik amallar soni bo‘yicha taqqoslash jadvali keltirilgan. Jadvalda berilganlarga ko‘ra kiruvchi qiymatlar soni 1024 bo‘lganda Fure TO‘ va Uolsh TO‘ da 10240 ta, Xaar TO‘ da 2046 ta, Xarmut TO‘ da 3068 ta arifmetik amallar talab qilinadi. Demak Xaar TO‘ algoritmida Xarmut TO‘ algoritmiga qaraganda 1,5 marta kam, Fure TO‘ va Uolsh TO‘ algoritmlariga qaraganda 5 marta kam arifmetik amal bajarilar ekan.

XAARNING BO’LAK-POLINOMIAL USULLARI

Ortogonal bo‘lak-o‘zgarmas bazis funksiyalari asosidagi tez o‘zgartirish algoritmlarini bo‘lak-chiziqli bazislarda koeffitsiyentlarni hisoblash uchun qanchalik qo‘llash mumkinligini ko‘rib chiqamiz.

Integrallardan foydalanilgan holda Fure-Xaar formulalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$C_0 = \int_0^1 x(r)dr \cong \sum_{i=0}^{N-1} \int_{hpj} x(r)dr$$

$$C_k = \int_0^1 x(r) \cdot har_k(r)dr = \sum_{i=0}^{N-1} har(i) \int_{hpj} x(r)dr \qquad (3)$$

$$i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 0,1,2,\ldots,2^{p-1}$$

Faqatgina agar o‘zgartirilgan $x(r)$ signallari $L_2[0,1)$ metrik fazosiga tegishli bo‘lsa amal qiladi.

Bunda lokal bazis funksiyalarning xossalaridan foydalanish mumkin, ya’ni bir xil tartibli 2^p sondagi funksiyalar orasida h_{pj} ikkilik-ratsional oraliqda noldan farqli faqat bitta funksiya bo‘ladi.

ISSN 3030-3907

(3) ifoda bilan berilgan koeffitsiyentlarni hisoblash algoritmi tez o‘zgartirish xususiyatiga ega emas, agar lokal bazislarda spektral koeffitsiyentlar qiymatlarini aniqlash zarur bo‘lsa chekli ayirma amalidan bevosita foydalanish mumkin.

Masalan, Shauder [6] bazisida koeffitsiyentlari quyidagi o‘zgartirishlar asosida hisoblanadi:

$$\Delta f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot Shd_k(X_{i+1}) - \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot Shd_k(X_i) =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot \left(\int Shd_k(r)dr - \int_{k=0} Shd_k(r)dr \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} C_k har_k(x_i) \quad (4)$$

$$C_k = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta f_i har_k(x_i) \quad (5)$$

Bu yerda “vaqt bo‘yicha” kamayish prinsiplariga asoslangan Shauder tez o‘zgartirish algoritmi keltirilgan. (5) ifodani o‘ng tomonining yig‘indisi ikkita qismga bo‘linadi, ulardan birinchisi i=0 dan i=n/2-1 gacha indeksli Δf_i ayirmalarni o‘z ichiga oladi, ikkinchisi esa i=n/2 dan i=n-1 gacha bo‘lgan indeksli Δf_i ayirmalarni o‘z ichiga oladi:

$$C_k = \sum_{i=0}^{N/2-1} \Delta f_i har_k(x_i) + \sum_{i=N/2}^{N-1} \Delta f_i har_k(x_i) \quad (6)$$

Natijaviy vektorning ikkinchi yarmini tashkil etuvchi koeffitsiyentlar, ya’ni n/2 raqamidan boshlab birinchi iteratsiyada aniqlanishi mumkin, $\{\Delta f_i\}$ ketma-ketligini har biri ikkita qo‘shni Δf_{2i} va Δf_{2i+1} elementlardan iborat bo‘lgan n/4 guruhga bo‘linadi va diskret Xaar o‘zgartirish formulasi har bir juftlikka qo‘llaniladi:

$$C_{N/2+j} = \Delta f_{2j} - \Delta f_{2j+1}, \qquad j = 0,1,\ldots,N/2-1$$

Ikkinchi iteratsiyada ketma-ketlik 8 ta elementdan iborat guruhlarga bo‘linadi, to‘rtinchisida 16 ta element va boshqalar. Tegishli qiymatlar quyidagi formulalar bo‘yicha aniqlanadi:

$$C_k = \sum_{i=0}^{N/2^p-1} \Delta f_i - \sum_{i=N/2^p}^{N/2^p-1} \Delta f_i \quad (7)$$

Oxirgi iteratsiyadagi C_1 va C_0 koeffitsiyentlari quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$C_1 = \sum_{i=0}^{N/2-1} \Delta f_i - \sum_{i=N/2}^{N-1} \Delta f_i$$

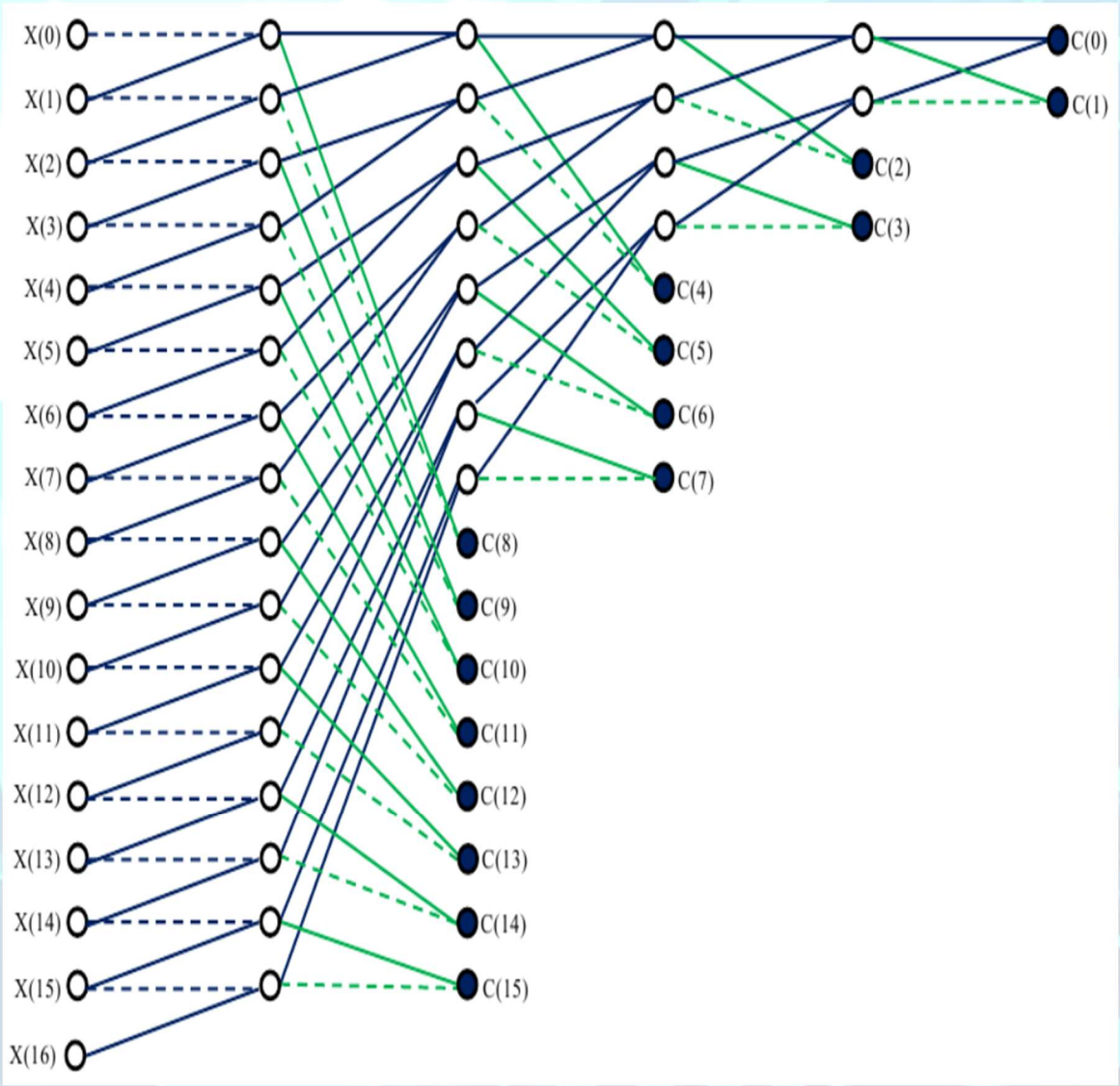
$$C_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta f_i$$

ISSN 3030-3907

Kiruvchi qiymatlar soni $N=16$ uchun Shauder tez o‘zgartirish algoritmining graf shaklda tasvirlanishini 3-rasmda ko‘rish mumkin.

Shunday qilib, bu algoritm bo‘lak-chiziqli bazislarda koeffitsiyentlarni hisoblash uchun ortogonal bo‘lak-o‘zgarmas bazis funksiyalar asosidagi tez o‘zgartirishlar graflarini qo‘llash imkonini beradi. Ushbu algoritmning kamchiliklari Δf_i chekli ayirmalarning kichik qiymatlari uchun yuzaga keladigan qiyinchilikdir.

Turli bazislarda koeffitsiyentlarni hisoblash usullarini tahlil qilish shuni ko‘rsatdiki, koeffitsiyentlarni hisoblash usullari faqat bo‘lak-o‘zgarmas va bo‘lak-chiziqli bazislar uchun mavjud. Bo‘lak-kvadratik bazislarda koeffitsiyentlarni hisoblash usullari ishlab chiqilmagan.



3-rasm. Shauder bo‘yicha tez o‘zgartirish grafi

Lokal bazislar tez o‘zgartirish algoritmlarida bir xil tartibdagi guruhdagi koeffitsiyentlar soni iteratsiya sonining ortishi bilan eksponensial ravishda

ISSN 3030-3907

kamayishi bilan tavsiflanadi. Bu fakt maxsus yuqori tezlikdagi hisoblash strukturalarini qurishda qo‘llanilishi mumkin.

Bo‘lak-kvadratik Xaar funksiyalarida yaqinlashuvchi qatorni ko‘rib chiqamiz.

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N-1} C_k haid_k(x) \qquad (8)$$

Berilgan qatorning kamchiligi C_k koeffitsiyentlarni hisoblashni tez algoritmlarini mavjud emasligidir. Bu kamchilikni parabolik splayn yordamida bartaraf etish mumkin. Agar $f(x)$ funksiyani [0,1] kesmada interpolyatsiyalanuvchi parabolik splayndan ikkinchi tartibli hosilasini olsak, u splayn tugunlarida qadam qiymatlari o‘zgargan bo‘lak-o‘zgarmas funksiya ifodalaydi va bo‘lak-o‘zgarmas ortogonal bazis funksiyalari bo‘yicha qator hosil bo‘ladi. Masalan, splayn hosilasining Xaar qatoriga yoyishni ko‘ramiz:

$$S_2''(x) \cong \sum_{k=0}^{N-1} C_k har_k(x) \qquad (9)$$

Chekli yaqinlashish va yopiq tizimlarning integrallash haqidagi teoremalarga muvofiq, ikkala qismni integrallash natijasida biz quyidagilarga erishamiz:

$$S_2'(x) = 2^p \int_0^x S_2''(u)du = \sum_{k=0}^{N-1} C_k hain_k(x) + S_2'(0)$$

$$S_2(x) = \int_0^x S_2'(u)du + S_2(0) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k haid_k(x) + S_2'(0) + S_2(0)$$

Shundan kelib chiqadiki, ikkilik-ratsional tugun nuqtalarda interpolyatsiyalanuvchi funksiya parabolik splaynning ikkinchi tartibli hosilasi Xaar ortogonal funksiyalari bo‘yicha koeffitsiyentlarni qatorga yoyishni, splaynning birinchi tartibli hosilasi *hain* – funksiyalari bo‘yicha koeffitsiyentlarni qatorga yoyishni, splaynning o‘zi esa *haid* – funksiyalari bo‘yicha qatorga yoyishni aglatadi. Koeffitsiyentlar splayn yoyilmasining chiziqli qismi orqali, ya’ni $S_2(x)$ splaynning birinchi tartibli hosilasini x=0 nuqtadagi qiymati sifatida, o‘zgarmas kompanenti esa ushbu nuqtadagi splaynning qiymati sifatida aniqlanadi.

Splayn funksiyalarining eng muhim xossalaridan biri yuqori darajadagi hosilalarning mavjudligidir. Bu xususiyat quyidagi bandlardan iborat bo‘lgan bo‘lak-parabolik bazislarda koeffitsiyentlarni hisoblash uchun apparatga yo‘naltirilgan algoritmini ishlab chiqish imkonini beradi:

ISSN 3030-3907

1. dastlabki funksional bog‘liqlikni kiritish, ya’ni haqiqiy eksperimental ma’lumotlar to‘plamini kiritish.

2. b-koeffitsiyentlar quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$b_i = \frac{1}{8}(-f_{i-1} + 10f_i - f_{i+1}) \qquad (10)$$

$S_2(x)$ splaynga yaqinlashuvchi qiymatlar quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$f(x) \cong S_2(x) = b_{-1} \cdot B_{-1}(x) + b_0 \cdot B_0(x) + b_1 B_1(x) \qquad (11)$$

Bu holda, bazis funksiyalarining qiymatlari o‘rniga, ikkinchi tartibli hosilalardan foydalanamiz [-1.5;-0.5] da $B''(x) = 1$, [-0.5;0.5] da $B''(x) = -2$ va [0.5;1.5] da $B''(x) = 1$ bo‘ladi.

$$f''(x) \cong S_2(x) = b_{-1} \cdot B''_{-1}(x) + b_0 \cdot B''_0(x) + b_1 B''_1(x) \qquad (12)$$

Ushbu hisob-kitoblar natijasida $S''_2(x_i)$ splaynga yaqinlashuvchi ikkinchi tartibli hosilasining massiv qiymatlari olinadi.

3. $S''_2(x_i)$ massivni hosil qilish

4. Olingan massivning elementlari ustida tez o‘zgartirish grafi yordamida tez o‘zgartirishlar amalga oshiriladi va koeffitsiyentlar aniqlanadi. Bu koeffitsiyentlar bo‘lak-kvadratik bazis koeffitsiyentlarini tashkil etadi.

$S''_2(x_i)$ massiv elementlarini yuqorida keltirilgan TO‘ algoritmlari yordamida spektral koeffitsiyentlar aniqlanadi. Ushbu koeffitsiyentlar bo‘lak kvadratik bazisdagi koeffitsiyentlarni bildiradi.

NATIJALAR

Xaarning bo’lak-polinomial bazislari yordamida signallarga raqamli ishlov berish imkoniyatlarini baholash maqsadida analitik funksiya va tajribadan olingan geofizik signal ma’lumotlari ustida tadqiqot o’tkazildi.

2-Jadval.

Xaarning bo’lak-polinomial usullari yordamida signallarga raqamli ishlov berishni tadqiqot natijalari

Funksiya turi	N	Bo‘lak o‘zgarmas Xaar bazisi		Bo‘lak chiziqli Xaar bazisi		Bo‘lak kvadrat Xaar bazisi	
		$N_0\%$	K_c	$N_0\%$	K_c	$N_0\%$	K_c
$Y = \sinh(x)$	1024	10,94	1,12	93,75	16,00	96,48	28,44
Geofizik signal	1024	9,38	1,11	38,28	1,62	78,13	4,57

ISSN 3030-3907

Tadqiqot natijalari 2-jadvalda ketirilgan. Ushbu jadvalda qiymatlar quyidagicha aniqlanadi:

$$K_c = N/(N - N0)$$

N – massiv elementlari soni;
N0% - nolga teng koeffitsiyentlar foizi;
Kc – siqish koeffitsiyenti.

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, analitik funksiyalardan olingan qiymatlarga bo'lak-polinomial bazislar yordamida raqamli ishlov berishda aniqlangan koeffitsiyentlarning qiymati nolga teng bo'lganlari bo'lak-o'zgarmas bazisida 11%, bo'lak-chiziqli bazisida 94% va bo'lak-kvadratik bazisida 96% bo'lishi mumkinligi aniqlandi. Xuddi shuningdek, geofizik kuzatuvlardan olingan real ma'lumot massivlarini raqamli ishlashda bu ko'rsatkichlar bo'lak-o'zgarmas bazisida 9%, bo'lak-chiziqli bazisida 38% va bo'lak-kvadratik bazisida 78% bo'lsihligi anqilandi. Bu esa, o'z navbatida, raqamli hisoblashlarda ma'lumotlarning siqilishi va optimallashuvi darajasi nihoyatda yuqori ekanligini ko'rsatadi. Shunday qilib, bo'lak-polinomial bazislardan foydalanish nafaqat aniqlikni, balki hisoblash resurslaridan samarali foydalanish imkoniyatini ham ta'minlaydi.

XULOSA

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, Xaar ortogonal bazisiga asoslangan bo'lak-polinomial algoritmlar signallarga raqamli ishlov berishda yuqori samaradorlikni ta'minlaydi. Shauder bazisidagi o'zgartirishlar va parabolik splaynlar yordamida spektral koeffitsiyentlarni aniqlashda aniqlikni oshirish imkoniyati yaratiladi. Ayniqsa, bo'lak-kvadratik bazislar uchun splaynlar asosidagi algoritmlar hisoblash murakkabligini pasaytirish bilan birga yuqori darajadagi hosilalarni saqlab qolish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
2. Гадзиковский В.И. Цифровая обработка сигналов.–М.: Солон-Пресс, 2013. – 766 с.
3. Сюзев В.В. Основы теории цифровой обработки сигналов. Учебное пособие:–М. Издательство: «РТСофт», 2014. – 752с.
4. Ильин А.А., Титов В.С., Евсюков Е.В. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие. Тула : Изд-во ТулГУ, 2004. – 125с.
5. Зайнидинов Х.Н, Жураев Ж.У, Маннапова М.Г. Интерполяция функций с помощью кусочно-постоянных и кусочно-линейных вейвлетов

ISSN 3030-3907

Хаара.//Автоматика и программная инженерия. 2020, №1(31), г. Новосибирск, Россия, -С. 42-48. http://www.jurnal.nips.ru
6. Зайнидинов Х.Н. Методы и средства цифровой обработки сигналов в кусочно-полиномиальных базисах. // Монография, Академия государственного управления при Президенте РУз. Т: «Fan va texnologiyalar», 2014, -С. 192.
7. Зайнидинов Х.Н., Зулунов Р.М., Ибрагимов С.С., Жўраев И.А. Бўлак-полиномиал базисларда сигналларга рақамли ишлов бериш алгоритм ва дастури. Фарғона политехника институти илмий-техника журнали 2016 й. 4-сон. 63-66 б.
8. Takahashi D. Fast Fourier Transform Algorithms for Parallel Computers. Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019 – p.120

ISSN 3030-3907