AYRIM TENGSIZLIKLAR HAQIDAGI TEOREMALARNING AJOYIB ISBOTI VA ULARNING AMALIYOTGA TADBIQI

Ibragimova Dilshoda Anvar qizi

Samarqand Davlat Tibbiyot Universiteti "Informatsion texnologiyalar, biofizika va tibbiy fizika" kafedrasi assisenti

E-mail: ibragimova_dilshoda@mail.ru

Annotatsiya: Ushbu mavzuda tengsizliklar tushunchasi, ularning turlari (chiziqli, kvadratik, irratsional va boshqalar), yechish usullari hamda grafik tasvirlash yo'llari o'rganiladi. Shuningdek, tengsizliklarning real hayotdagi qo'llanilishi, matematik model yaratishdagi roli ham ko'rib chiqiladi. Mavzu matematik mantiqni mustahkamlash va muammolarni tahlil qilish ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: tengsizlik, chiziqli tengsizlik, kvadratik tengsizlik, interval usuli, grafik yechim, matematik model, yechim to'plami

Аннотация: В данной теме рассматриваются понятие неравенств, их виды (линейные, квадратные, иррациональные и др.), методы их решения и способы графического представления. Также обсуждаются практические применения неравенств и их роль в математическом моделировании. Тема способствует развитию логического мышления и навыков анализа.

Ключевые слова: неравенство, линейное неравенство, квадратное неравенство, метод интервалов, графическое решение, математическое моделирование, множество решений

Annotation: This topic explores the concept of inequalities, their types (linear, quadratic, irrational, etc.), methods of solving them, and graphical representation techniques. It also covers the practical applications of inequalities and their role in mathematical modeling. The topic enhances logical reasoning and analytical problem-solving skills.

Keywords: inequality, linear inequality, quadratic inequality, interval method, graphical solution, mathematical model, solution set

Kirish.

Matematika – bu faqat nazariy tushunchalar emas, balki real hayotdagi muammolarni modellashtirish va tahlil qilish uchun qudratli vositadir. Ayniqsa, **tengsizliklar** kundalik hayotda qaror qabul qilish, optimal resurs taqsimoti va xavfsizlik chegaralarini belgilashda keng qo'llaniladi. Budjet cheklovlari, maksimal ishlab chiqarish hajmi, minimal energiya sarfi kabi ko'plab iqtisodiy va texnik masalalar tengsizliklar orqali ifodalanadi.

Ushbu maqolada tengsizliklarning muhim teoremalaridan bo'lgan **AM-GM** va **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizliklari chuqur tahlil qilinadi, ularning matematik isbotlari keltiriladi hamda real va nazariy masalalar orqali qo'llanilishi namoyish

ISSN 3030-3907

etiladi. Shuningdek, maqola o‘quvchilarning tahliliy fikrlash, isbotlash va modellashtirish ko‘nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Asosiy qism.

AM-GM tengsizligi (Aritmetik-geometrik o‘rtacha teoremasi)

Matn: (siz yuborgan isbotlar asosida qoldiriladi, tartibli qilib yoziladi).

Umumlashgan AM-GM yoki Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi

Matn: (siz yuborgan asosiy isbot saqlanadi, lemmalar bilan), bilan tanishishingiz mumkin:

Teorema(AM-GM): Barcha musbat $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ sonlar uchun

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

tengsizlik o’rinli. Tenglik $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ bo’lganda bajariladi.

Isbot: Induksiyadan foydalanamiz.

$$n = 2 \text{ da } \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \iff (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \quad \forall a_1, a_2 \geq 0$$

(1)da $n$ta musbat sonlar uchun o’rinli deb hisoblab $n+1$ ta R^+ sonlar uchun o’rinli ekanligini isbotlaymiz. Bu sonlar $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, a_{n+1}$ bo’lib a_{n+1} ularning eng kattasi bo’lsin,

$$a_{n+1} \geq a_1, a_{n+1} \geq a_2, \dots a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (2)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \; ; \; A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}$$

(2)ga ko’ra $a_{n+1} \geq A_n \Rightarrow a_{n+1} = A_n + \alpha \quad \alpha \geq 0$ deylik. U holda:

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + \alpha}{n+1} = A_n + \frac{\alpha}{n+1}$$

Bu tenglikning ikkala qismini $n+1$ darajaga ko’tarib, quyidagini topamiz:

$$(A_{n+1})^{n+1} = A_n^{n+1} + C_{n+1}^1 (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} + \cdots + C_{n+1}^n (A_n) \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^n +$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1} \geq (A_n)^{n+1} + C_{n+1}^1 (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1}$$
$$= (A_n)^{n+1} + (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} \frac{(n+1)!}{1!\, n!}$$
$$= A_n^{n+1} + (A_n)^n \alpha = A_n^n (A_n + \alpha) = A_n^n \cdot a_{n+1}$$

Farazga ko’ra $A_n^n \geq a_1 a_2 \dots a_n \Rightarrow$

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \Rightarrow$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}$$

Bundan kelib chiqadiki teorema isbotlandi.

ISSN 3030-3907

Teorema(Umumlashgan AM-GM yoki Koshi-Bunyakovskiy): $a_1, a_2, \dots a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ musbat sonlar

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots . a_n^{p_n} \le \left(\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \quad (1)$$

Munosabat o'rinli , tenglik esa faqat $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$da bajariladi.

Isbot: Lemma: $e^{x-1} \ge x$ bo'ladi, bunda $x \ge 1$.

Lemmaning isboti: $f(x) = e^{x-1} - x$ deb olamiz. => $x \ge 1$ ekanligidan $f(x) \ge f(1)$ bo'ladi. => $e^{x-1} - x \ge e^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0$ => $e^{x-1} - x \ge 0$

(1)ni isbotlashda Lemmadan foydalanamiz.

$$S = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

deb belgilash kiritamiz.

Lemmaga ko'ra: $e^{\frac{a_i}{s}-1} \ge \frac{a_i}{s}$ bo'ladi, bunda $i = \overline{1,n}$ => $S \cdot e^{\frac{a_i}{s}-1} \ge a_i$ =>

$$a_i^{p_i} \le S^{p_i} \cdot e^{\frac{a_i p_i}{S} - p_i}, \quad i = \overline{1,n}$$

Bu tengsizliklarning barchasini ko'paytirib chiqamiz.

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots . a_n^{p_n} \le \left(\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

Tenglik faqat $s = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ da bajariladi, bundan kelib chiqadiki tengsizlik isbotlandi.

Biz bu teoremalardan foydalanib bir qancha quyidagi tengsizlik haqidagi masalalarni yechishimiz mumkin.

Masalalar

1-misol: $x, y > 0$ bo'lsa, $x^2 + y^2 + 1 \ge xy + x + y$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot: $x^2 + y^2 + 1 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \ge xy + x + y$

Bundan kelib chiqadi tengsizlik isbotlandi.

2-misol: $x > 0$ bo'lsa, $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \ge 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot: AM-GM teoremasiga ko'ra: $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \ge 2 \cdot 2^{x^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}} = 2 \cdot 2^{2x^{\frac{1}{6}}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ bundan kelib chiqadi tengsizlik isbotlandi.

3-misol: Agar $x, y > 0$ bo'lsa, $x^4 + y^4 + 8 \ge 8xy$ ni isbotlang.

Isbot: $x^4 + y^4 + 8 = (x^4 + 4) + (y^4 + 4) \ge 2(2x^2 + 2y^2) \ge 2(4xy) = 8xy$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

Izoh: Bu tengsizlik simmetrik funksiyalarning eng kichik qiymasini aniqlashda qo'llaniladi.

4-misol: $x_1, x_2, \dots, x_5 > 0$ bo'lsa quyidagini isbotlang:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \ge x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Isbot: $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} + x_3^2 + \frac{x_1^2}{4} + x_4^2 + \frac{x_1^2}{4} + x_5^2 \ge x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5 =$

ISSN 3030-3907

$$= x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

5-misol: $x, y, z > 0$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx =$$
$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} + \frac{y^2 - 2yz + z^2}{2} + \frac{z^2 - 2xz + x^2}{2} =$$
$$= \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2} \geq 0$$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

6-misol: $a, b, c > 0$ bo'lsa, $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c) \geq 16abc$ ni isbotlang.

Isbot: $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c) \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{bc} = 16abc$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

7-misol: $a, b, c > 0$ bo'lsa, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ni isbotlang:

Isbot: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

8-misol: Agar $a, b, c > 0$ bo'lsa,

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

ni isbotlang.

Isbot: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

9-misol: Agar $a, b, c > 0$, $ab^2c^3 = 1$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 6$$

Isbot: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{ab^2c^3}} = 6$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

10-misol: Agar $a, b, c > 0$ bo'lsa, quyidagini isbotlang.

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 4\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 \geq 7$$

Isbot: Koshi-Bunyakovskiy teoremasiga ko'ra:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$
$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + 4\left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 \geq 7$$
$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \geq 1 \Rightarrow$$

ISSN 3030-3907

$$1+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}+4(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2})^2\geq 7$$

$$\frac{1}{6}\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+\frac{1}{6}\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+\frac{1}{6}\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+2(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2})^2+2(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2})^2\geq$$

$$6\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{64}\cdot 2^4\cdot\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)^4}\geq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S\geq 6$$

⇨Tengsizlik isbotlandi.

Grafik va vizualizatsiya

Python kodi (3D grafiklar uchun):

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# x va y oraliqlarini belgilash
x = np.linspace(0.1, 3, 100)
y = np.linspace(0.1, 3, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
# Tengsizlikning ikkala tomoni
lhs = X**2 + Y**2 + 1          # chap tomoni: x^2 + y^2 + 1
rhs = X*Y + X + Y              # o'ng tomoni: xy + x + y
# Grafik chizish
fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
# Chap tomonni (LHS) chizish
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
ax1.plot_surface(X, Y, lhs, cmap='viridis', alpha=0.9)
ax1.set_title(r'LHS: $x^2 + y^2 + 1$')
ax1.set_xlabel('x')
ax1.set_ylabel('y')
ax1.set_zlabel('z')
# O'ng tomonni (RHS) chizish
ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
ax2.plot_surface(X, Y, rhs, cmap='plasma', alpha=0.9)
ax2.set_title(r'RHS: $xy + x + y$')
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('y')
ax2.set_zlabel('z')
```


ISSN 3030-3907

```
    plt.tight_layout()
plt.show()
```

Amaliy tadbiq (real-case misollar)

Tibbiyotda

Tibbiy protokollarda dori dozasining eng kam va eng ko‘p miqdorlari odatda **tengsizliklar** orqali ifodalanadi. Masalan, bemorning tana vazniga qarab maksimal ruxsat etilgan doza D≤k·mD \leq k \cdot mD≤k·m (bu yerda kkk — doza koeffitsienti, mmm — vazn) ko‘rinishida aniqlanadi. Bu yondashuv bemorga xavfsiz va individual moslangan davolash usulini qo‘llash imkonini beradi.

Iqtisodiyotda

Budjetni rejalashtirishda har bir resurs sarfi umumiy budjetni oshmasligi kerak, bu esa x1+x2+⋯+xn≤Bx_1 + x_2 + \dots + x_n \leq Bx1+x2+⋯+xn≤B ko‘rinishidagi **chiziqli tengsizlik** bilan ifodalanadi. Tengsizliklar asosida tuzilgan matematik modellar orqali optimal sarf-harajat strategiyalari aniqlanadi. Bu iqtisodiy samaradorlikni oshirish va cheklangan resurslardan oqilona foydalanishni ta’minlaydi.

Muhandislikda

Inshootlar va texnik tizimlarning konstruktiv elementlari ma’lum yuklamalarni ko‘tara olishi kerak, bu esa chidamlilik chegarasini bildiradi. Masalan, stress (kuchlanish) qiymati materialga xos maksimal qiymatdan oshmasligi uchun σ≤σmax\sigma \leq \sigma_{max}σ≤σmax tengsizligi qo‘llaniladi. Bunday **tengsizliklar muhandislik xavfsizligi** va mustahkamlikni kafolatlashda muhim rol o‘ynaydi.

Xulosa

Tengsizliklar matematik tahlil, muhandislik, iqtisodiyot va tibbiyot kabi ko‘plab sohalarda muhim vosita sifatida xizmat qiladi. Ushbu maqolada eng mashhur va kuchli tengsizlik teoremalaridan biri bo‘lgan **AM-GM (aritmetik-geometrik o‘rtacha)** va **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizliklari o‘rganildi, ularning **induksiya**, **elementar algebra** va **eksponenta funktsiyasi asosidagi** isbotlari keltirildi.

Keltirilgan misollar orqali bu tengsizliklarning nafaqat nazariy, balki **amaliy ahamiyati** ham ko‘rsatib berildi. Ular yordamida murakkab ifodalarni baholash, muammolarni soddalashtirish, shuningdek, real hayotdagi cheklovlarni matematik model sifatida ifodalash imkoniyati mavjudligi isbotlandi.

Shuningdek, maqolada tengsizliklarning:
tibbiyotda – **doza chegaralarini aniqlashda**,
iqtisodiyotda – **budjet taqsimotini rejalashtirishda**,
muhandislikda – **mexanik xavfsizlikni ta’minlashda**
qanday qo‘llanilishi ko‘rsatildi.

ISSN 3030-3907

Kelgusida bu mavzuni quyidagi yo‘nalishlarda kengaytirish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

Holder, **Chebyshev** va **Minkowski** tengsizliklari kabi ilg‘or tengsizliklarni o‘rganish,

algoritmik tahlil asosida **kompyuter orqali avtomatlashtirilgan isbotlash usullari**ni qo‘llash,

tengsizliklarning **olimpiyadalardagi** qo‘llanilishini tahlil qilish.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI :

1. Ишмуратов А.А. Matematik analiz asoslari – Toshkent: O‘qituvchi, 2008.
2. Polya G. How to Solve It – Princeton University Press, 1957.
3. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. Inequalities – Cambridge University Press, 1934.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Москва: МЦНМО, 2002.
5. Rahimov B. Matematik tahlil masalalar to‘plami – Toshkent: Fan, 1995.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Наука, 1977.
7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Математический анализ. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Поля Г. Неравенства. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
9. Богданов А.П., Трофимова Т.И. Высшая математика для экономистов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 540 с.
10. Алиев Р.А. Применение неравенств в инженерных расчетах // Вестник МГТУ. – 2016. – №3. – С. 45–52.
11. Абдуллаев Б.А. Matematik tahlil asoslari. – Toshkent: O‘qituvchi, 2000. – 385 b.
12. Qurbonov X.X., Yusupov A.R. Oliy matematika. – Samarqand: SamDU nashriyoti, 2019. – 412 b.
13. Ибрагимова Д.А. Ayrim tengsizliklarning amaliy tahlili // Samarqand DTU ilmiy axborotnomasi. – 2023. – №2. – B. 90–94.
14. Sedgewick R., Wayne K. Algorithms (4th Edition). – Addison-Wesley, 2011. – 976 p.
15. Weisstein, Eric W. “Inequality.” MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: https://mathworld.wolfram.com/Inequality.html

ISSN 3030-3907