УДК 517.984.53

О СПЕКТРАХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

Арзикулов Галибжон Пардаевич
ТДТУ PhD.
E-mail: arzikulov79@mail.ru

Аннотация: В работе рассматривается самосопряженный частично интегральный оператор T типа Фредгольма в пространстве $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ с вырожденным ядром, а также исследуется существенный и дискретный спектры оператора T.

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, частично интегральный оператор типа Фредгольма.

Abstract: In the paper we consider self-adjoint partial integral operators of Fredholm type T with a degenerate kernel on the space $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$. Essential and discrete spectrum of T are described.

Keywords: essential spectrum, discrete spectrum, partially integral operator of Fredholm type.

Аннотация: Ушбу мақолада $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ фазода ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма T хусусий интеграл оператор кўриб чиқилган, шунингдек T операторнинг муҳим ва дискрет спектрлари ўрганилган.

Калит сўзлар: муҳим спектр, дискрет спектр, Фредгольм типидаги хусусий интеграл оператор.

Введение

В развитии теории операторов, важную роль играют свойства интегральных операторов типа Фредгольма и Вольтерра. Теория интегральных операторов имеет многочисленные применения в различных областях математики, механики, теоретической физики, квантовой механики и теории операторов Шредингера.

Настоящая статья посвящена упомянутой проблеме для частично интегрального оператора (ЧИО) с вырожденными ядрами из класса L_2.

Пусть

$$T = T_1 + T_2 \qquad (1)$$

Линейный интегральный оператор в пространстве $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$, где $\Omega_1=[a,b]$, $\Omega_2=[c,d]$. Здесь операторы T_1 и T_2 заданы по формуле:

$$(T_1 f)(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s),\ d\mu_1(s) = ds,$$

$$(T_2 f)(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t),\ d\mu_2(t) = dt.$$

ISSN 3030-3907

Здесь $k_1(x,s,y)$ и $k_2(x,t,y)$ - измеримые функции на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ и на $\Omega_1 \times \Omega_2^2$ соответственно.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ ортонормированная система функций из $L_2(\Omega_1)$, и пусть $\{h_i(y)\}_{i=1}^n$ - система существенных ограниченных вещественных функций на Ω_2. Определим измеримую функцию $k_1(x,s,y)$ на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ с помощью следующего правила:

$$k_1(x,s,y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(s)}h_i(y). \qquad (2)$$

Тогда ЧИО T_1 с ядром $k_1(x,s,y)$ является линейным ограниченным, самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Пусть $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^m$ ортонормированная система функций из $L_2(\Omega_2)$, и пусть $\{p_j(x)\}_{j=1}^m$ система существенных ограниченных вещественных функций на Ω_1. Определим измеримую функцию $k_2(x,t,y)$ на $\Omega_1 \times \Omega_2^2$ с помощью следующего правила:

$$k_2(x,t,y) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\psi_j(y)\overline{\psi_j(t)}. \qquad (3)$$

Тогда ЧИО T_2 с ядром $k_2(x,t,y)$ является линейно ограниченным, самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Для существенной ограниченной функции $\varphi \geq 0$ на измеримом множестве $\Omega \subset R^v$, определим:

$$ess\sup_{\Omega}(\varphi) = \inf\left\{C : \mu\left(\{\xi \in \Omega : \varphi(\xi) > C\}\right) = 0\right\},$$

где $\mu(\cdot)$ - мера Лебега на R. Для измеримой функции φ на множестве $\Omega \subset R^v$, число $\lambda \in R$ называется существенным значением функции φ

$$\mu\left(\{\xi \in \Omega : \lambda - \varepsilon < \varphi(\xi) < \lambda + \varepsilon\}\right) > 0$$

для всех $\varepsilon > 0$. Обозначим через $Essran(\varphi)$ множество всех существенных значений функции φ.

В этой статье мы изучаем спектр ЧИО вида (1) с вырожденным ядром Резольвента, где существенный и дискретный спектр оператора обозначаются ρ, σ, σ_{ess} и σ_{disc} соответственно [2].

Для начала изучим спектральные свойства ЧИО T_1 и T_2.

Рассмотрим следующие проекторы P_i в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$:

$$P_i f(x,y) = \int_{\Omega_1} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(s)}f(s,y)d\mu_1(s), \quad i \in \{1,...,n\}.$$

ISSN 3030-3907

Пусть $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$ и $P_0 = E - P$, где E тождественный оператор. Тогда проекторы P_i и P_j $(i \neq j)$ ортогональны. Следующее утверждение удерживается [7,8].

Предложение 1. *Если* $\lambda \neq 0$ *и* $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} Essran(h_i)$, *затем оператор* $T_1 - \lambda E$ *обратимо в* $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *и а оператор* $(T_1 - \lambda E)^{-1}$ *ограниченный* $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *более того*

$$(T_1 - \lambda E)^{-1} f(x,y) = -\frac{1}{\lambda}\left(f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(y)}{h_i(y) - \lambda} P_i f(x,y) \right).$$

Теорема 1. *Для спектров* $\sigma(T_1)$ *ЧИО* T_1 *с вырожденным ядром (2), следующая формула имеет вид:*

$$\sigma(T_1) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} Essran(h_i) \right).$$

Доказательство. По предложению 1, мы получаем $\sigma(T_1) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} Essran(h_i) \right)$, имеем $0 \in \sigma(T_1)$, теперь докажем $\bigcup_{i=1}^{n} Essran(h_i) \subset \sigma(T_1)$.

Пусть $\lambda_0 \in Essran(h_{j_0})$, $\lambda_0 \neq 0$ и t_0 произвольная точка из подмножество Вставим:

$$V_i = \left\{ t \in \Omega_2 : \frac{1}{i+1} < |t_0 - t| < \frac{1}{i} \right\}, \quad i \in N.$$

Тогда существует такое $n_0 \in N$, что $\mu_2(V_i) > 0$ для всех $i \geq n_0$. Рассчитаем следующую последовательность ортонормированных функций $\chi_p(y) \in L_2(\Omega_2)$:

$$\chi_p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu_2(V_p)}}, & y \in V_p, \\ 0, & y \notin V_p, \end{cases}$$

Где $p \geq n_0$. Определим через $f_p(x,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ортонормированную систему функций: $f_p(x,y) = \varphi_{j_0}(x)\chi_p(y)$, $p \geq n_0$. Тогда у нас есть

$$(T_1 - \lambda_0 E) f_p(x,y) = (h_{j_0}(y) - \lambda_0) f_p(x,y).$$

Следовательно,

$$\left\| (T_1 - \lambda_0 E) f_p \right\| \leq \sqrt{ess\sup V_p \left(h_{j_0}(y) - \lambda_0 \right)^2}, \quad p \geq n_0.$$

ISSN 3030-3907

Так как ноль является существенным значением функции $h_{j_0}(y)-\lambda_0$, то для больших $n_1 \geq n_0$, существует небольшое число δ_{n_1} такое, что $\left|h_{j_0}(y)-\lambda_0\right|<\delta_{n_1}$ для почти всех $y \in V_p$, $p \geq n_1$.

Следовательно, $\left\|\left(T_1-\lambda_0 E\right) f_p\right\| \leq \delta_{n_1}$, $p \geq n_1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\left(T_1-\lambda_0 E\right) f_n\right\|=0$. Это и критерий Вейля. Для существенного спектра самосопряженного оператора [2] вытекает $\lambda_0 \in \sigma_{ess}\left(T_1\right) \subset \sigma\left(T_1\right)$.

Очевидно, $T_1 f_k(x,y)=\lambda f_k(x,y)$, $k \in N$, то есть число λ является собственным значением ЧИО T_1 бесконечной кратности.

Следствие. *Дискретный спектр ЧИО T_1 с вырожденным ядром* (2) *отсутствует.*

Рассмотрим следующие проекторы Q_j в пространстве $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$:

$$Q_j f(x,y)=\int_{\Omega_2} \psi_j(y)\overline{\psi_j(t)} d\mu_1(t), \qquad j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Предложение 2. *Если $\lambda \neq 0$ и $\lambda \notin \bigcup\limits_{j=1}^{m} Essran(p_j)$, то оператор $T_2-\lambda E$ обратим на $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$, а оператор $\left(T_2-\lambda E\right)^{-1}$ равен ограниченной в $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$, более того*

$$\left(T_2-\lambda E\right)^{-1} f(x,y)=-\frac{1}{\lambda}\left(f(x,y)-\sum_{j=1}^{m} \frac{p_j(x)}{p_j(x)-\lambda} Q_j f(x,y)\right).$$

Теорема 2. *Для спектра $\sigma\left(T_2\right)$ ЧИО T_2 с вырожденным ядром* (3), *выполняется следующая формула:*

$$\sigma\left(T_2\right)=\{0\} \cup\left(\bigcup_{j=1}^{m} Essran\left(p_j\right)\right).$$

Теперь будем изучать спектр частично интегрального оператора T_1+T_2.

Предположим, что $\tau \neq 0$ и $\tau^{-1} \in \rho\left(T_1\right)$. Тогда оператор $E-\tau T_1$ обратим в $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$, а оператор $\left(E-\tau T_1\right)^{-1}$ ограничен на $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$, кроме того, по предложению 1 имеем:

$$\left(E-\tau T_1\right)^{-1} f(x,y)=f(x,y)+\tau \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(y)}{1-\tau h_i(y)} P_i f(x,y).$$

Аналогично, по предложению 2 имеем

$$\left(E-\tau T_2\right)^{-1} f(x,y)=f(x,y)+\tau \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j(x)}{1-\tau p_j(x)} Q_j f(x,y).$$

Пусть $\tau \neq 0$ и $\tau^{-1} \in \rho\left(T_1\right) \cap \rho\left(T_2\right)$. Определим компактные операторы $W_1(\tau)$ и $W_2(\tau)$ по следующим формулам:

ISSN 3030-3907

$$W_1(\tau)=\left(E-\tau T_2\right)^{-1}S_1(\tau)T_2,\qquad W_2(\tau)=\left(E-\tau T_1\right)^{-1}S_2(\tau)T_1,$$

где

$$S_1(\tau)f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i(y)}{1-\tau h_i(y)}\left(P_i f\right)(x,y),\qquad S_2(\tau)f(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j(x)}{1-\tau p_j(x)}\left(Q_j f\right)(x,y).$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau\neq 0$ и $\tau^{-1}\in\rho\left(T_1\right)\cap\rho\left(T_2\right)$. *Тогда следующее три однородных Фредгольмовых второго рода эквивалентны:*

$$f-\tau\left(T_1+T_2\right)f=0,\qquad f-\tau^2W_1(\tau)f=0,\qquad f-\tau^2W_2(\tau)f=0.$$

Предположим, что $\tau\neq 0$ и $\tau^{-1}\in\rho\left(T_1\right)\cap\rho\left(T_2\right)$. Обозначим через $\Delta_1(\tau)$ и $\Delta_2(\tau)$ определители Фредгольма операторов $E-\tau^2W_1(\tau)$ и $E-\tau^2W_2(\tau)$, соответственно. Определить в C следующие подмножества

$$\Im_k=\left\{\tau\in C\setminus\{0\}:\tau^{-1}\in\rho\left(T_1\right)\cap\rho\left(T_2\right)\ \ u\ \ \Delta_k(\tau)\neq 0\right\},\qquad k=1,2.$$

$$\Re_k=\left\{\tau\in C\setminus\{0\}:\tau^{-1}\in\rho\left(T_1\right)\cap\rho\left(T_2\right)\ \ u\ \ \Delta_k(\tau)=0\right\},\qquad k=1,2.$$

Из леммы 1 следует, что $\Im_1=\Im_2$ и $\Re_1=\Re_2$. Положим $\Im=\Im(T)=\Im_1$ и $\Re=\Re(T)=\Re_1$. Тогда получим:

$$\Im\cup\Re=\left\{\tau\in C:\tau\in C\setminus\{0\}\ \ u\ \ \tau^{-1}\in\rho\left(T_1\right)\cap\rho\left(T_2\right)\right\}$$

и $\Im\cap\Re=\varnothing$.

Вставим:

$$\Re_0=\Re_0\left(T\right)=\left\{\xi:\xi=\frac{1}{\tau},\ \ \tau\in\Re\left(T\right)\right\}.$$

Лемма 2. *Для каждого* $\lambda\in C\setminus\left(\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)\cup\Re_0(T)\right)$, *резольвента* $R_\lambda(T)$ ЧИО $T=T_1+T_2$ *существует и ограничена на* $L_2\left(\Omega_1\times\Omega_2\right)$.

Лемма 3. *Для резольвентного оператора* $R_\lambda(T)$ ЧИО $T=T_1+T_2$, *формула*

$$R_\lambda(T)=-\frac{1}{\lambda}\left(E-\frac{1}{\lambda^2}W_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{-1}\left(E-\frac{1}{\lambda}T_2\right)^{-1}\left(E-\frac{1}{\lambda}T_1\right)^{-1}$$

выполняется для каждого $\lambda\in C\setminus\left(\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)\cup\Re_0(T)\right)$.

Лемма 2 и Лемма 3 следует [7, 8] из обратимости и структуры резольвенты общего частичного интегрального оператора $\lambda E-T_1-T_2-K$.

Предложение 3. *Ноль является собственным значением бесконечной кратности ЧИО* $T=T_1+T_2$.

Доказательство. Определим через $\mathscr{K}$ подпространство гильбертова пространства $L_2\left(\Omega_1\times\Omega_2\right)$, построенного ортогональной системой $\left\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\right\}_{i=\overline{1,n},\,j=\overline{1,m}}$. Затем $\dim\mathscr{K}=\mathrm{m}\times\mathrm{n}$, а для подпространства $\mathscr{H}_0=L_2\left(\Omega_1\times\Omega_2\right)\oplus\mathscr{K}$, имеем dim $dim\mathscr{H}_0=\infty$.

Пусть $\left\{f_k\right\}_{k\in N}$ - ортонормированный базис в $\mathscr{H}_0$. Очевидно, что

ISSN 3030-3907

$$T_1 f_p(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega_1}\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(s)}h_i(y)f_k(s,y)d\mu_1(s)=0,\quad p\in N,$$

$$T_2 f_p(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_2}p_j(x)\overline{\psi_j(t)}\psi_j(y)f_j(x,t)d\mu_2(t)=0,\quad p\in N.$$

то есть

$$(T_1+T_2)f_k(x,y)=0,\quad k\in N.$$

Предложение 4. *[10] Включение* $\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)\subset\sigma_{ess}(T_1+T_2)$

Предложение 5. *Каждое* $\lambda\in\Re_0(T)$ *является собственным значением конечной кратности ЧИО* $T=T_1+T_2$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\Re_0(T)$. Тогда $\lambda\neq 0$ и $\Delta_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$, где $\Delta_1(\tau)$, есть определитель Фредгольма оператора $E-\tau^2W_1(\tau)$). Это означает, что число 1 является собственным значением компактного интегрального оператора $\frac{1}{\lambda^2}W_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. По Лемме 1, число λ является собственным значением ЧИО $T=T_1+T_2$. Поскольку следующие интегральные уравнения

$f-\frac{1}{\lambda}(T_1+T_2)f=0$ и $f-\frac{1}{\lambda^2}W_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)f=0$ эквивалентны, число λ является собственным значением конечной кратности T_1+T_2 потому что каждое собственное значение $\alpha\neq 0$ компактных операторов имеет конечную множественность.

Следующая теорема вытекает из леммы 2 и предложений 4, 5.

Теорема 3. *Для спектра* $\sigma(T)$ *ЧИО* $T=T_1+T_2$ *с вырожденным ядром, следующая формула:*

$$\sigma(T)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}Essran(h_i)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}Essran(p_j)\right)\cup\Re_0(T)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Н Векуа *Новые методы решения эллиптических уравнений*, М.-Л., 1948.
2. М.Рид, Б.Саймон *Методы современной математической физики* -Т.1, Функциональный анализ, - М.; Мир, 1977.
3. Э. Гурса *Курс математического анализа*, Т.3, Ч.2, М-Л, 1934.
4. Г. Мюнтц *Интегральные уравнения*, Т.1, Л-М, 1934.
5. V.M.Aleksandrov, E.V. Kovalenko *Contact interaction of bodies with coatings in the presense of abrasion,* Soviet Phys. Dokl. 29(1984) 4, P. 340-342.
6. Eshkabilov Yu.Kh. *Spectra of partial integral operators with a kernel of three variables.* Central European J. Math., 2008, **6**, Num.1, pp.149-157.
7. Kalitvin A.S. *On a class of integral equations in the spase of continuous functions,* Differential Equations **42**, (2006), pp. 1262-1268.

ISSN 3030-3907

8. Zabrejko P.P., Kalitvin A.S., Frolova E.V.: *On partial integral equations in the space of continuous functions,* Differential Equations **38**,4 (2002),pp.-546.
9. Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров *О существенном и дискретном спектрах трехчастичного оператора Шредингера,* ТМФ, 170, №3, 2012, С.409-422.
10. А.С.Калитвин *Линейные операторы с частными интегралами*, Воронеж, 2000.

ISSN 3030-3907