PARABOLIK TENGLAMALAR UCHUN MAKSIMUM PRINSIPINI UMUMLASHTIRISH VA TAQQOSLASH

Zulfixarov Ilxom Maxmudovich
Andijon davlat texnika instituti "Axborot texnologiyalari" kafedrasi dotsenti
E-mail: izulfixarov@mail.ru
Tel: +998916092928.

Annotatsiya. Parabolik tenglama uchun cheksiz sohada lokal va nolokal chegaraviy masalalarni o'rganishda zarur bo'lgan, muhim tushunchalari va ular uchun maksimum prinsipi, chegaraviy masalalar yechimlarining mavjudligi hamda yagonaligini isbotlash usullari ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar. Parabolik tenglama, $(n+1)$ o'lchovli D soha, maksimum prisip, chiziqli almashtirish, matritsa, ellipsoid, parallelepiped, maksimum prinsip, taqqoslash teoremalar.

Аннотация. Изложены важные понятия, необходимые для исследования локальных и нелокальных краевых задач в бесконечной области для параболического уравнения, принципа максимума для них, а также методы доказательства существования и единственности решений краевых задач.

Ключевые слова. Параболическое уравнение, (n+1)-мерная D-сфера, принцип максимума, линейная подстановка, матрица, эллипсоид, параллелепипед, принцип максимума, теоремы сравнения.

Abstract. Important concepts necessary for the study of local and nonlocal boundary value problems in an infinite domain for a parabolic equation, the maximum principle for them, and methods for proving the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems are presented.

Keywords. Parabolic equation, (n+1) dimensional D-sphere, maximum principle, linear substitution, matrix, ellipsoid, parallelepiped, maximum principle, comparison theorems.

Kirish.

Yurtimizda avvaldan shakllangan ilmiy maktablar salohiyati hisobga olinib, hozirgi bosqichdagi milliy manfaatlarimiz va taraqqiyotimiz yo'nalishlaridan kelib chiqqan holda, matematika, kimyo, biologiya, geologiya, injinerlik va axborot texnologiyalari kabi fan va sohalarini rivijlantirishga alohida e'tibor qaratilmoqda.

Shavkat Mirziyoyev 2019-yil 9-iyul kungi olimlar va yoshlar bilan uchrashuvda matematikada ilmiy tadqiqotlarni amaliyot bilan bog'lash, yoshlarda matematika faniga qiziqishlarini kuchaytirish, iqtidorlilarini seleksiya qilib, ixtisoslashtirilgan maktablar va keyinchalik oliy ta'lim muassasalariga qamrab olish ishlarini to'g'ri tashkil qilish kerakligi ta'kidlangan.

ISSN 3030-3907

Shavkat Mirziyoyevning 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori ijrosi va boshqa me’yoriy huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirilishida oz bo‘lsada o‘z hissamizni qo‘shish maqsadida ushbu maqolani yozishni maqsad qildik.

Adabiyotlar taxlili. Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining murakkab va asosiy bo‘limlaridan biri aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish, nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga egadir.

Ma’lumki, aralash tipdagi parabolik tenglamalar o‘tgan asrning 60-yillaridan boshlab rivojlandi. Injinerlik masalalari uchun chekli va cheksiz sohalarda regulyar va fundamental yechimlari o‘rganilib, asosiy chegraviy masalalar bilan bir qatorda nolokal chegaraviy masalalar ham tadqiq etilgan.

Parabolik tenglama uchun cheksiz sohada lokal va nolokal chegaraviy masalalarni o‘rganish uchun maksimum prinsiplarini umumlashtirish va taqqoslash jarayonlarini samarali o‘zlashtirish dolzarb hisoblanadi.

Biz ushbu maqolamizda Салахитдинов М.С., Ўринов А.Қ., Исамухамедов С.С., Акбарова С.Х. kabi Respublikamizning etuk olimlarini ilmiy asarlarini o‘rganib chiqib biroz bo‘lsada taqqoslash jarayonini takomillashtirilgan holda ko‘rib chiqishga harakat qildik.

Usullar va Natijalar.

Maksimum prinsipi - $(n+1)$ o‘lchovli D sohada quyidagi

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.1)$$

operatorni qaraymiz. Bundan buyon quyidagi shartlar bajariladi deb faraz qilamiz:

(A) L operator D da parabolik, ya’ni har bir $(x,t) \in D$ nuqta va ihtiyoriy $\xi = 0$ vektorlar uchun $\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0$.

(B) L operatorning koeffitsiyentlari D sohada uzluksiz funksiyalar.

(C) D da $c(x,t) \leq 0$.

$(1,1)$ da $u(x,t)$ funksiya har doim x o‘zgaruvchi bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilalari va t o‘zgaruvchi bo‘yicha birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz deb hisoblaymiz.

Belgilashlar kiritamiz:

$P^0 = (x^0, t^0)$ D dagi ihtiyoriy nuqta bo‘lsin. $S(P^0)$ orqali D dagi shunday Q nuqtalar to‘plamini belgilaymizki, ularni D da yotuvchi P^0 sodda uzluksiz egri chiziq bilan birlashtirish mumkin bo‘lib, bu chiziq ustuda t koordinata Q dan P^0 ga kamaymaydi. $C(P^0)$ orqali P^0 ni o‘z ichiga oluvchi, $D \cap \{t = t^0\}$ bilan kesishuvchi komponentani belgilaymiz. $S(P^0) \supset C(P^0)$ ekanligini ko‘ramiz..

ISSN 3030-3907

Kuchli maksimum prisipi quyidagicha ifodalanadi:

Teorema 1. (A), (B) va (C) shartlar bajarilsin.

Agar D da $Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$ va agar u D sohada $P^0(x^0, t^0)$ nuqtada musbat maksimum(manfiy minimum)ga erishsa, u holda barcha $P \in S(P^0)$ lar uchun $u(P) = u(P^0)$ bo‘ladi [1 va 2].

Teoremaning isbotini musbat maksimumga erishilgan hol uchun isbotlash yetarli, chunki, manfiy minimum hol u ni $(-u)$ ga almashtirish bilan musbat maksimum holga keltiriladi. Aniqlashtirish maqsadida bir nechta lemmalarni isbotlaymiz ((A), (B), (C) shartlar bajariladi deb faraz qilgan holda).

Lemma 1. Faraz qilamiz, D ning hamma nuqtalarida $Lu > 0$, yoki $Lu \geq 0$va $c(x, t) < 0$. U holda u D da musbat maksimumga ega bo‘lishi mumkin emas.

Isbot. Agar u D da musbat maksimumga erishadi deb olsak, qarama-qarshilikka duch kelamiz. Haqiqatan ham, aytaylik $P^0 = (x^0, t^0)$ nuqtada maksimumga erishsin. U holda

$$\sum_{i,j=1} a_{ij}(x^0, t^0) \frac{\partial^2 u(x^0, t^0)}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0. \qquad (1.2)$$

Haqiqatan, $y = Cx$ chiziqli almashtirish bilan D soha D^* sohaga, (1.2) tengsizlik esa

$$\sum_{i,j=1} b_{ij} \frac{\partial^2 v(y^0, t^0)}{\partial y_i \partial y_j} \leq 0. \qquad (1.3)$$

tengsizlikka almashadi. Bu yerda

$$v(y, t) = u(x, t), \qquad y_0 = Cx_0, \qquad (b_{ij}) = C(a_{ij})C^*$$

($C^* - C$ bilan transponillangan matritsa). C ni shunday tanlab olamizki, bunda b_{ij} matritsa birlik matritsa bo‘lsin va $v(y^0, t^0) - D^*$ da v ning musbat maksimumi ekanligidan

$$\frac{\partial^2 v(y^0, t^0)}{\partial y_i^2} \leq 0$$

Ekanligi kelib chiqadi, ko‘ramizki, (1.3) shart bajariladi, demak, (1.2) ham bajariladi. Lemma isbotini yakunlash uchun, (x^0, t^0) nuqtada

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ va } \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ekanligini e’tiborga olishimiz kerak. Bundan esa,

$$Lu(x^0, t^0) \leq c(x^0, t^0)u(x^0, t^0).$$

$u(x^0, t^0) > 0$ dan boshlab, xar bir $Lu > 0, c \leq 0$ va $Lu \geq 0, c < 0$ hollarda qarama-qarshilikka duch kelamiz.

Lemma 2. D da $Lu \geq 0$ va u M musbat maksimumga ega bo‘lsin. Faraz qilamiz, D yopiq E ellipsoidni o‘z ichiga oladi:

ISSN 3030-3907

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \le R^2 (\lambda_i > 0, R > 0)$$

E ning ichki nuqtalarida $u < M$ va E ellipsoid chegarasi ∂E dagi biror $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{t})$ nuqtada $u(\bar{x}, \bar{t}) = M$ [1 va 2].

U holda $\bar{x} = x^*$, bu yerda $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Isbot. $\bar{P}$ ni $u = M$ bo‘ladigan ∂E dagi yagona nuqta deb olishimiz mumkin, aks holda E da yotuvchi va ∂E bilan umumiy nuqtaga $\bar{P}$ ega bo‘lgan kichikroq yopiq ellipsoidni olamiz.

Faraz qilamiz, $\bar{x} \neq x^*$ va $C -$ markazi $\bar{P}$ nuqtada bo‘lgan va radiusi $|\bar{x} - x^*|$ dan kichik bo‘lgan $(n+1)$ o‘lchovli yopiq shar. U holda barcha $(x, t) \in C$ larda

$$|\bar{x} - x^*| \ge const > 0. \qquad (1.4)$$

C shar chegarasi E da yotuvchi ∂C_1 va E dan tashqarida yotuvchi ∂C_2 qismlardan tashkil topadi. Shubhasiz, ba’zi $\delta > 0$ larda ∂C_1 da

$$u < M - \delta. \qquad (1.5)$$

$$h(x,t) = \exp\left\{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2\right]\right\} -$$

$$-\exp\{-\alpha R^2\}, \qquad \alpha > 0. \qquad (1.6)$$

funksiyani kiritamiz. E ning ichida $h > 0$, ∂E da $h = 0$ va E dan tashqarida $h < 0$ bo‘ladi.

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2\right]\right\} Lh(x,t) =$$

$$= \left\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) -\right.$$

$$\left. - 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i (x_i - x_i^*) - \lambda_0 (t - t^*)\right] + c\right\} -$$

$$-c\exp\{-\alpha R^2\}\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2\right]\right\}.$$

Agar α yetarlicha kata bo‘lganda (1.4) ga ko‘ra birinchi qavsning o‘ng qismi C sharda musbat bo‘ladi. Ohirgi had o‘ng qismi noldan kata yoki teng. Shuning uchun $c \le 0$. Demak C da

$$Lh > 0 \qquad (1.7)$$

Endi C da va $v = u + \varepsilon h$ $(\varepsilon > 0)$ funksiyani qaraymiz. Agar $\varepsilon -$ yetarlicha kichik bo‘lsa, (1.5) ga ko‘ra ∂C_1 da $v < M$ bo‘ladi. ∂C_2 da funksiya $u \le M$ va $h <$

ISSN 3030-3907

0, shuning uchun $v < M$ bo‘ladi. Shunday qilib $v < MC$va$v(\bar{P}) = u(\bar{P}) = M$ chegarasida. Bundan C ning ichida v musbat maksimumga erishishi kelib chiqadi.

(1.7) ga ko‘ra lemma 1 da qarama-qarshilikka duch kelamiz, natijada $\bar{x} = x^*$ bo‘ladi.

Lemma 3. Agar D da $Lu \geq 0$ va D da $u(x,t)$ musbat maksimumga $P^0 = (x^0, t^0)$ nuqtada erishadi, u holda barcha $P \in C(P^0)$ lar uchun $u(P) = u(P^0)$ bo‘ladi [1 va 2].

Isbot. Agar lemma xato bo‘lsa, u holda shunday $C(P^0)$ da $P^1 = (x^1, t^0)$ nuqta topiladiki, natijada $u(P^1) < u(P^0)$ bo‘lar edi. P^1vaP^0 nuqtalarni $C(P^0)$ da yotuvchi γ uzluksiz egri chiziq bilan tutashtiramiz.

γ da $u(P^*) = u(P^0)$ bo‘ladigan $P^* = (x^*, t^0)$ nuqta mavjud va barcha γ da P^1 va P^* orasida yotuvchi barcha $\bar{P} = (\bar{x}, t^0)$ nuqtalarda $u(\bar{P}) < u(P^0)$ bo‘ladi. $\bar{P}$niγ da P^1 va P^* orasida yotadigan qilib shunday olamizki $\bar{P}$ dan chegaragacha bo‘lgan masofa $\overline{2\bar{P}P^*}$ dan kata yoki teng bolsin.

$u(\bar{P}) < u(P^*)$ga ko‘ra shunday $x = \bar{x}$, $t^0 - \varepsilon \leq t \leq t^0 + \varepsilon$ munosabatlar bilan aniqlangan yetarlicha kichik σ_0 yopiq interval mavjudki, barcha P nuqtalarda

$$u(P) < u(P^*) \qquad (1.8)$$

bo‘ladi.

E_λ ellipsoidlar oilasini qaraymiz:

$$|x - \bar{x}|^2 + \lambda(t - t^0)^2 \leq R^2, \qquad \lambda > 0.$$

$R^2 = \lambda\varepsilon^2$ deb olamiz. U holda σ ning ohiri E_λ – ellipsoidning chegarasida yotadi. Agar $\lambda \to 0$ bo‘lsa, $E_\lambda \to \sigma$ bo‘ladi. λ o‘sganda $E_\lambda \cap \{t = t^0\}$ kesishma chegaralanmagan holda o‘sadi. Bundan va (1.8) tengsizlikka ko‘ra shunday kichik $\lambda = \lambda_0$ topiladiki, E_λ ichida $u < u(P^*)$ va E_λ chegarasidagi ba’zi $Q = (y, t^0)$ nuqtalarda $u = u(P^*)$ bo‘ladi. (1.8) tengsizlikka ko‘ra $Q\sigma$ da yota olmaydi, ya’ni $y \neq \bar{x}$, bu esa lemma 2 ga zid.

Lemma 4. Bizga D da yotgan R – parallelepiped

$$x_i^0 - a_i \leq x_i \leq x_i^0 + a_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad t^0 - a_0 \leq t \leq t^0$$

berilgan bo‘lsin va D da $Lu \geq 0$ bo‘lsin.

Agar $u(x,t)R$ dagi $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ bo‘lgan $P^0 = (x^0, t^0)$ nuqtada musbat maksimumga erishsa, u holda barcha $P \in R$ lar uchun $u(P) = u(P^0)$ bo‘ladi [1 va 2].

Isbot. Agar lemma noto‘g’ri deb faraz qilsak, u holda R da shunday Q nuqta topiladiki $u(Q) < u(P^0)$ bo‘ladi. $u < u(P^0)$ga ko‘ra Q ning ba’zi atroflari $t = t^0$ gipertekislikda yotmasligi mumkin. Q bilan P^0 ni tutashtiruvchi γ kesishmada shunday P^1 nuqta mavjudki, $u(P^1) = u(P^0)$ bo‘ladi va Q va P^1 orasida yotuvchi γ dagi barcha nuqtalar uchun

ISSN 3030-3907

$u(\bar{P}) < u(P^1)$ bo‘ladi. $P^1 = P^0$ va $Qt = t^0 - a_0$ gipertekislikda yotadi deb olishimiz mumukin, aks holda kichikroq parallelepiped olamiz.

$R_0 - R$ parallelepipedning $t = t_0$ yuqori qirrasi kirmagan qismi bo‘lsin. R_0har bir Q' nuqtalar uchun $C(Q')$ component γ ning ba’zi nuqtalarini o‘zida saqlaydi, ammo γ dagi nuqtalarda $u < u(P^0)$. Bundan lemma 3 ga ko‘ra $u(Q^1) < u(P^0)$.

$$h(x,t) = t^0 - t - K|x - x^0|^2, \qquad K > 0 \qquad (1.9)$$

funksiyani kiritamiz.

M paraboloidda $t^0 - t = K|x - x^0|^2 h = 0$, M dan yuqorida $h < 0$, M dan quyida esa $h > 0$ bo‘ladi. Bundan tashqari R da yetarlicha kichik va $4K\sum a_{ij} \le 1$ bo‘lsa, R da

$$Lh = -2K\sum_{i=1}^{n} a_{ii} - 2K\sum_{i=1}^{n} b_i\left(x_i - x_i^0\right) + c[t^0 - t - K|x - x^0|^2] + 1 > 0$$

bo‘ladi.

MR ni ichki qismiga bo‘ladi. R' orqali quyi qismini $(h > 0)$ belgilaymiz. R' ning B' yuqori chegarasi $t = t^0$ gipertekislik bilan faqat P^0 nuqtada kesishadi. Shuning uchun R' chegaraning boshqa B'' chegarasida ba’zi $\delta > 0$ lar uchun $u \le u(P^0) - \delta$ bo‘ladi (eslatib o‘tamiz R_0 da $u < u(P^0)$). Bundan yetarlicha kichik ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun B''da $v \equiv u + \varepsilon h < u(P^0)$. Keyin esa B' ning P^0 dan tashqari barcha nuqtalari uchun $v = u < u(P^0)$, $v(P^0) = u(P^0)$ munosabatlarga ega bo‘lamiz. R' da $Lv = Lu + \varepsilon Lh > 0$ bo‘lgani uchun, lemma 1 ga ko‘ra v funksiya R' da musbat maksimumga R' soha chegarasida erishadi, aniqrog’i, oldin berilgan eslatmalarga asosan P^0 nuqtada erishadi. Bundan $\partial v(P^0)/\partial t \ge 0$ ga ega bo‘lamiz. Shuning uchun $\partial h(P^0)/\partial t = -1 < 0$ ga ko‘ra quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\frac{\partial u(P^0)}{\partial t} > 0 \qquad (1.10)$$

Boshqa tomondan $u(x,t)$ musbat maksimumga P^0 nuqtada erishadi, $\partial u(P^0)/\partial x_i = 0$ va $c(P^0)u(P^0) \le 0$ bajarilganda (1.2) shart bajarilishini topamiz. Demak, P_0 nuqtada $0 \le Lu \le -\partial u/\partial t$, ya’ni $\partial u(P^0)/\partial t \le 0$. Bu esa (1.10) ga zid. Lemma isbotlandi.

Endi teorema 1 isbotini osongina yakunlash mumkin. $S(P^0)$ da $u \not\equiv u(P^0)$ deb olamiz. U holda $u(Q) < u(P^0)$ bo‘ladigan $Q \in S(P^0)$ bo‘ladigan nuqta topiladi. Q dan P^0 gacha $t-$ koordinatalari kamaymaadigan $S(P^0)$ da yotgan Q va P^0 larni γ egri chiziq bilan tutashtiramiz. γ da $u(P^1) = u(P^0)$ bo‘ladigan shunday P^2 nuqta va Q va P^1 orasida yotivchi γ ning $u(\bar{P}) < u(P^1)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\bar{P}$ nuqtalari mavjud.

$$x_i^1 - a \le x_i \le x_i^1 + a, \qquad i = 1,2,\dots,n, \qquad t^1 - a < t \le t^1$$

ISSN 3030-3907

bo‘lgan parallelepiped quramiz. Bu yerda $P^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1, t^1)$ va parallelepiped D da yotishi uchun $a -$ yetarlicha kichik deb tanlab olamiz.

Lemma 4 ga ko‘ra parallelepipedda $u \equiv u(P^1)$, chunki bu γ_0 ning parallelepipedga tushgan qismi. Ammo bu P^1 ning aniqlanishiga zid.

Maksimum prinsipini umumlashtirish - $(n+m)$ o‘lchovli D sohada uzliksiz koeffitsiyentli quyidagi differensial operatorni qaraymiz:

$$Mu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \qquad (1.2.1)$$

Bu yerda $(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m)$. Barcha $(x,t) \in D$ lar uchun $a_{ij}(x,t) -$ musbat aniqlangan matritsa, $b_{ij}(x,t) -$ esa yarimmusbat aniqlangan matritsa deb faraz qilamiz. D da $c(x,t) \le 0$ bo‘lsin.

Teorema 2. Agar M operator yuqorida ko‘rsatilgan shartlarni qanoatlantirsa, D da $Mu \ge 0$ $(Mu \le 0)$ va $u(x,t)$ D sohada musbat maksimum(manfiy minimum)ga ega bo‘lib, $P^0 = (x^0, t^0)$ nuqtada erishsa, u holda barcha $P \in C(P^0)$ lar uchun $u(P) = u(P^0)$ [1 va 2].

Isbot. Lemma1 va uning isboti M operator uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Lemma2 ham M operator uchun o‘rinli, faqat ellipsoid tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 (x_i - x_i^*)^2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (t_i - t_i^*)^2 \le R^2.$$

Isbotning qolgan qismi huddi Lemma3 kabi bo‘ladi.

Teorema 3. M operator teorema 2 dagi $c \le 0$ shartsiz barcha shartlarni qanoatlantirsin. Agar D da musbat bo‘lmasa(manfiy bo‘lmasa) va D dagi P^0 nuqtada nolga teng bo‘lsa, u holda $C(P^0)$ da $u \equiv 0$ bo‘ladi [1 va 2].

Isbot. $u \le 0$ bo‘lgan holni qarashimiz yetarli. $v = uexp[-ax_1]$ quyidagi

$$\tilde{M}v \equiv (M-c)v + 2a\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \ge -(a_{11}a^2 + a_1 a + c)v \qquad (1.2.2)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

P^0 nuqtaning ixtiyoriy N atrofida $v \le 0$ $(N \subset D)$, u holda shunday yetarlicha katta a topiladiki, N da $\tilde{M}v \ge 0$ bo‘ladi. Shunday qilib $\tilde{M}v$ dagi v ning koeffitsiyentlari nolga teng. Teorema 2 ni qo‘llagan holda (masalan, $v+1$ uchun) $N \cap C(P^0)$ da $v \equiv 0$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $N \cap C(P^0)$ da $u \equiv 0$ bo‘ladi. Huddi shunday $u = 0$ dagi nuqtalar to‘plami $C(P^0)$ da ochiq to‘plam hosil

ISSN 3030-3907

qiladi. Bu to‘plam $C(P^0)$ bilan birgalikda yopiq to‘plam hosil qiladi, demak $C(P^0)$ da $u \equiv 0$.

Teorema 4. (A), (B), (C) shartlar bajarilsin, $S(P^0)$ to‘plamda funksiya P^0 nuqtada musbat maksimum (manfiy minimum)ga ega bo‘lsin. Bundan keyin $S(P^0)$da $Lu \geq 0 (Lu \leq 0)$ deb olamiz. U holda barcha $P \in S(P^0)$lar uchun $u(P) = u(P^0)$ bo‘ladi [1 va 2].

Isbot. Huddi teorema 1 kabi funksiyaga $S(P^0)$ da $u(P)$ $u(P^0)$ maksimumga erishishidan foydalanamiz.

$t = t_1$ gipertekislikda yotuvchi F ochiq soha berilgan bo‘lsin. Faraz qilamiz F D ning chegarasida yotsin, ya’ni F ning qandaydir $(x,t) t < t_1$ yarim fazoda $P \in D$ nuqtalarda $u(x,t)$ musbat maksimum (manfiy minimum)ga ega bo‘ladi, bu maksimum (minimum)ga $\overline{S(P)}$ ning to‘ldiruvchisida yotuvchi ba’zi nuqtalarda erishadi.

Teorema 5. $S(P)$ ning nuqtalarda maksimum (minimumu)ga erishmasligini ta’kidlamaydi [1 va 2].

Eslatma. Agar $1, 2, 4, 4', 6$ teoremalarda $c(x,t) \equiv 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy A o‘zgarmas son uchun $L(u + A) = Lu$ bo‘ladi. Bundan barcha natijalar u funksiya maksimum (minimum)i musbat (manfiy) bo‘lmaganda o‘rinli bo‘ladi.

Muhokama.

Taqqoslash teoremalar - Buda biz $D, S, B, D_\tau, B_\tau, S_\tau$ kabi belgilashlardan foydalanamiz. B_τ $0 \leq \tau \leq T$ R^n da berilgan soha, D esa R^{n+1} dagi soha.

Teorema 6. $\bar{D}$ da $v(x,t)$ va $w(x,t)$ uzluksiz funksiyalar berilgan bo‘lsin, D da x bo‘yicha ikkinchi tartibli, t bo‘yicha birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsin. $F\left(x,t,p,p_i,p_{ij}\right), i,j = 1,\dots,n -$ funksiya E sohada p_{hk} bo‘yicha xususiy hosilalar bilan birgalikda uzluksiz bo‘lsin, $\left(x,t,p,p_i,p_{ij}\right) -$ urilish nuqtalari to‘plami quyidagi shartlarni bajarsin:

$$(x,t) \in D, \qquad p \in \left(v(x,t), w(x,t)\right), \qquad p_i \in \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}, \frac{\partial w(x,t)}{\partial x_i}\right),$$

$$p_{ij} \in \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right);$$

bu yerda (a,b) a bilan b ni tutashtiruvchi interval. $(\partial F / \partial p_{hk})$ musbat yarim aniqlangan matritsa [1 va 2].

Agar

$$D \text{ da} \frac{\partial v}{\partial t} > F\left(x,t,v,\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right) \qquad (1.3.1)$$

$$D \text{ da} \frac{\partial w}{\partial t} \leq F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right) \qquad (1.3.2)$$

va agar

ISSN 3030-3907

$$\bar{B} + S \quad \text{da } v > w, \qquad (1.3.3)$$

u holda D da $v > w$ bo‘ladi.

Isbot. $(0, T)$ intervalda σ nuqtalar to‘plamini qaraymiz, barcha $x \in \overline{B_t}$ va $0 \le t < \sigma$ larda $v(x,t) > w(x,t)$ bo‘ladi. Agar biz $sup\sigma = T$ ekanligini isbotlasak, teorema isbotlanadi.

$sup\sigma = t_0$ bo‘lsin. (1.3.3) ga ko‘ra $t_0 > 0$. Agar t_0 T dan kichik bo‘lsa, $z = v - w$ funksiya D_{t_0} da musbat, B_{t_0} da esa manfiy bo‘lmagan va $\overline{B_{t_0}}$ ning qandaydir $P^0 = (x^0, t^0)$ nuqtalarda nolga teng bo‘lishi mumkin. P^0 –nuqta B_{t_0} ning chegarasida yotolmaydi, shunga ko‘ra S da $v > u$ (6.3 ga ko‘ra). Shuning uchun P^0 nuqta B_{t_0} da yotishi vaz funksiyaning B_{t_0} dagi minimum bo‘lishi kerak. Bundan,

$$\frac{\partial z(P^0)}{\partial x_i} = 0.$$

Huddi shu kabi fikr yuritish va bundan oldin isbotlangan tengsizlikdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{\partial^2 z(P^0)}{\partial x_i \partial x_j} \ge 0,$$

bu yerda F funksiya argumenti E dagi ixtiyoriy nuqta bo‘lishi mumkin.

Teoremaga ko‘ra $v(P^0) = u(P^0)$ ekanligidan P^0 nuqtada (1.3.1) ning o‘ng tomoni (1.3.2) ning o‘ng tomonidan kata yoki teng. Shuning uchun P^0 nuqtada $\partial w/\partial t < \partial v/\partial t$.

Boshqa tomondan barcha $P \in D_{t_0}$larda $z(P^0) < z(P)$, bundan P^0 nuqtada $\partial z/\partial t \le 0$ ya’ni P^0 nuqtada $\partial v/\partial t \le \partial w/\partial t$. Qarama-qarshilik hosil bo‘ldi, demak $sup\sigma = T$.

Teorema 7. Teorema 6 dagi (1.3.3) shartni quyidagi shartga almashtirib

$$\bar{B} \text{da } v > w \qquad (1.3.4)$$

va

$$S \text{ da} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \beta(x,t,v) < \frac{\partial w}{\partial \tau} + \beta(x,t,w) \qquad (1.3.5)$$

qolgan barcha shartlar bajariladi deb olaylik [1 va 2].

Bu yerda $\beta -$ ixtiyoriy funksiya, $\tau = \tau(x,t)D_t + B_t$ da ichida yotadi va $\partial v/\partial \tau$, $\partial w/\partial \tau$ lar mavjud. U holda D da $v > w$ bo‘ladi.

Isboti yuqorida berilganga o‘xshash isbotlanadi. Yagona farqi shuki, $P^0 = (x^0, t^0)$ nuqta B_{t_0} ning chegarasida yotmaydi, chunki biz (1.3.3) shartni (1.3.5) ga almashtirganmiz.

Xulosa.

ISSN 3030-3907

Parabolik tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalar bo‘yicha ilmiy izlanishlar natijasida XX asrning o‘rtalaridan boshlab, ularning amaliyotga ko‘plab tadbiqlari aniqlangan bo‘lib, chekli va cheksiz sohalarda regulyar va fundamental yechimlar o‘rganilgan.

Ushbu maqolada, parabolik tenglamalar nazariyasidagi boshlang’ch tushunchalar keltirilib, bu tipdagi tenglamalar uchun maksimum prinsipi hamda taqqoslash teoremalari yoritildi hamda chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi o‘rganil yoritildi.

O‘rganilgan mavzu ham amaliy, ham nazariy jihatdan muhim ahamiyatga ega bo‘lib, fizika, texnika, biologiya fanlarida uchraydigan, jumladan suyuqlik va gazlar harakatini o‘rganishda qo‘llanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения // ДАН РУ, 1992. - №12, - с.3-5.
2. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевая задача для смешанного эллиптико-параболического уравнения с различными порядками вырождения внутри области // Узб.матем.журн., 1994. -№ 4, - с.51-60.
3. Ўринов А.Қ. Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. 2015. Тошкент: MUMTOZ SO’Z. 196 б.
4. Zulfixarov I.M., Texnika oliy ta’lim muassasalarida matematikadan o‘quv mashg‘ulotlarini loyihalashtirib o‘qitish metodikasi. // ProfiUniversity “O‘zbekistonda pedagog kadrlarni tayyorlashning muammo va yechimlari” mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari. Toshkent -2024.
5. Акбарова С.Х., Халилов М.Д. О краевой задаче для смешанно-параболического уравнения // “Управление, оптимизация и динамические системы” Респ.науч.конф. с участием зарубежных ученых. Андижан, 17-19.X. 2019. стр.116-117.
6. Акбарова С.Х., Акбарова М.Х., Халилов М.Д. О разрешимости нелокальной краевой задачи для смешанно-параболического уравнения // International Scientific Journal “Global Science and innovations 2019: Central Asia” Nur-Sultan Kazakhstan, Sep-Oct 2019. стр.130-131.
7. Исамухамедов С.С., Акбарова М.Х. Нелокальные краевые задачи для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа. // Тезисы докл. Междунар.науч.конф. “Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа”. Ташкент. 23-25 ноября 1993 г. с.77.

ISSN 3030-3907