CHIZIQLI DINAMIK TIZIMLARNING BOSHQARUVCHANLIGI, KALMAN MEZONI VA ZAMONAVIY UMUMLASHTIRILGAN YONDASHUVLAR

Safarov Elyorbek Xasanovich
Andijon davlat texnika instituti, dotsent

Annotatsiya. Ushbu maqolada chiziqli vaqt-invariant dinamik tizimlarning boshqaruvchanligini tahlil qilish, Kalman mezoni asosida boshqaruvchanlik shartlarini aniqlash hamda zamonaviy nazariy umumlashtirishlar ko‘rib chiqiladi. Boshqaruvchanlik nazariyasi minimal realizatsiya, Kalman dekompozitsiyasi, differensial-algebraik va fraksion tartibli tizimlarga qo‘llanishi misolida yoritiladi, MATLAB muhitida olib borilgan hisoblashlar va misollar orqali esa amaliy ahamiyati namoyish etiladi. Natijalar chiziqli tizimlar uchun klassik Kalman rank mezoni hali ham asosiy vosita ekanini, biroq zamonaviy tadqiqotlarda uni fraksion, impulsli, kechikishli va katta o‘lchamli tarmoqlar uchun umumlashtirish yo‘nalishlari faol rivojlanayotganini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: boshqaruvchanlik, Kalman mezoni, Kalman dekompozitsiyasi, chiziqli tizim, differensial-algebraik tizim, fraksion tartibli tizim, MATLAB.

Аннотация. В данной статье рассматривается анализ управляемости линейных стационарных динамических систем и условия управляемости, сформулированные на основе критерия Калмана. Теория управляемости изложена на примере минимальной реализации, декомпозиции Калмана, а также применений к дифференциально-алгебраическим и дробно-порядковым системам, при этом практическая значимость подхода демонстрируется на вычислительных примерах в среде MATLAB. Полученные результаты показывают, что классический ранговый критерий Калмана по-прежнему остается основным инструментом для линейных систем, однако в современных исследованиях активно развиваются его обобщения для дробных, импульсных, запаздывающих систем и больших сетевых структур.

Ключевые слова: управляемость, критерий Калмана, декомпозиция Калмана, линейная система, дифференциально-алгебраическая система, дробно-порядковая система, MATLAB.

Abstract. This paper analyzes the controllability of linear time-invariant dynamical systems and formulates controllability conditions based on the Kalman criterion. Controllability theory is illustrated through minimal realization, Kalman decomposition, and applications to differential-algebraic and fractional-order systems, while the practical relevance of the approach is demonstrated by numerical examples implemented in MATLAB. The results indicate that the classical Kalman rank condition remains the main tool for linear systems, whereas

ISSN 3030-3907

recent studies actively develop its extensions to fractional, impulsive, time-delay systems and large-scale networked structures.

Keywords: controllability, Kalman criterion, Kalman decomposition, linear system, differential-algebraic system, fractional-order system, MATLAB.

Kirish

Zamonaviy avtomatik boshqaruv tizimlari energetika, mexatronika, robototexnika va jarayonlarni avtomatlashtirish sohalarida keng qo‘llanilayotganligi sababli, chiziqli dinamik tizimlarning boshqaruvchanlik xususiyatlarini chuqur o‘rganish zarurati ortib bormoqda. Boshqaruvchanlik tushunchasi tizimni istalgan boshlang‘ich holatdan istalgan yakuniy holatga cheklangan vaqt ichida, mos boshqaruv signali yordamida o‘tkaza olish imkoniyatini ifodalaydi va Kalman tomonidan nazariy jihatdan formalizatsiya qilingan [1].

Chiziqli vaqt-invariant (LTI) tizimlar uchun Kalman rank mezoni boshqaruvchanlikni tekshirishning sodda, lekin kuchli vositasi bo‘lib, u nazariyaning asosiy qatlamini tashkil etadi hamda ko‘plab zamonaviy darslik va monografiyalarda batafsil yoritilgan. Shu bilan birga, so‘nggi yillarda fraksion differensial tenglamalar, kechikishli va impulsli tizimlar, differensial-algebraik tizimlar hamda katta o‘lchamli tarmoqlar uchun Kalman tipidagi yangi mezonlar taklif qilinmoqda. Mazkur maqolada klassik nazariya qisqacha bayon qilinib, dastlabki manbada keltirilgan oddiy 2-tartibli misol kengaytiriladi va hozirgi davrdagi ayrim nazariy umumlashtirishlar bilan bog‘lanadi [2].

Materiallar va metodlar

Chiziqli vaqt-invariant tizim modeli

Uzliksiz vaqtli chiziqli vaqt-invariant tizim odatda quyidagi holda ifodalanadi:

$$x'(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad y(t)=Cx(t)+Du(t),$$

bu yerda $x(t) \in \mathrm{R}^n$ – holat vektori, $u(t) \in \mathrm{R}^m$ – boshqaruv vektori, $y(t) \in \mathrm{R}^p$ – chiqish vektori, A, B, C, D – mos o‘lchamdagi doimiy matritsalardir. Tizim boshqaruvchan deb ataladi, agar har bir $x_0, x_f \in \mathrm{R}^n$ va yetarlicha katta, lekin chekli $T>0$ uchun shunday $u(t)$ mavjud bo‘lsinki, $x(0)=x_0$ dan boshlanib, $x(T)=x_f$ ga erishish mumkin bo‘lsin [3].

Kalman mezoniga ko‘ra, uzluksiz vaqtli LTI tizim boshqaruvchan bo‘lishi uchun quyidagi boshqaruvchanlik matritsasi to‘la rangga ega bo‘lishi zarur va yetarli [4]:

$$W_c=[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B],$$

va shart

$$\mathrm{rank}(W_c)=n$$

bajarilganda, (A, B) juftligi boshqaruvchan hisoblanadi.

ISSN 3030-3907

Kalman dekompozitsiyasi va minimal realizatsiya

Kalman dekompozitsiyasi chiziqli tizimni boshqaruvchan va boshqarib bo‘lmaydigan, shuningdek kuzatuvchan va kuzatib bo‘lmaydigan osttizimlarga ajratishga imkon beradi. Mos keluvchi koordinata almashtirish yordamida tizim matrikslarini blokli Kanonik shaklga keltirish, minimal realizatsiyani – ya’ni bir vaqtning o‘zida boshqaruvchan va kuzatuvchan bo‘lgan qismini ajratib olishga yordam beradi. Bu yondashuv real texnik tizimlarda ortiqcha holatlar sonini kamaytirish va boshqaruv algoritmlarini soddalashtirish uchun muhim hisoblanadi [5, 6].

MATLAB muhitida boshqaruvchanlikni tekshirish

Amaliy hisoblashlar uchun MATLAB dasturining Control System Toolbox kutubxonasi keng qo‘llaniladi. Boshqaruvchanlik matritsasini hosil qilish uchun *ctrb(A,B)* funksiyasi, rangni aniqlash uchun esa *rank()* funksiyasi ishlatiladi, bu esa real muhandislik masalalarida turli o‘lchamdagi tizimlar boshqaruvchanligini tez tekshirish imkonini beradi. Shuningdek, kanon funksiyasi yordamida tizimni Kalman dekompozitsiyasiga yaqin bo‘lgan kanonik ko‘rinishga keltirish va nazariy tahlilni avtomatlashtirish mumkin [7].

Natijalar

Oddiy 2-tartibli tizim uchun hisoblash

Dastlabki maqolada ko‘rib chiqilgan misolni saqlagan holda, quyidagi 2-tartibli tizimni olaylik:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu tizim uchun boshqaruvchanlik matritsasi

$$W_c=[BAB]= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ko‘rinishiga ega bo‘lib, rank(W_c) = 2 sharti bajariladi va tizim to‘liq boshqaruvchan hisoblanadi. MATLAB muhitida bu quyidagi buyruqlar orqali tasdiqlanadi: W_c = *ctrb(A,B)*; *rank(W_c)*; natijada rang 2 ga teng bo‘lishi qayd etiladi [8].

Boshqaruvchanlik va energiya sarfi

Boshqaruvchan bo‘lgan tizimda maqsadli holatga erishish mumkin bo‘lsada, bu jarayon uchun talab qilinadigan boshqaruv energiyasi juda katta bo‘lishi mumkin, shuning uchun amaliy loyihalashda Gram-matritsa asosida boshqaruv energiyasini minimallashtirish masalalari ham ko‘riladi. Kalman kriteriyidan tashqari, boshqaruvchanlik Gramiyni tahlil qilish orqali optimal boshqaruv signallarini topish va ularning parametrlariga cheklovlar qo‘yish muhim hisoblanadi [9].

Kengaytirilgan natijalar: fraksion va impulsli tizimlar

ISSN 3030-3907

So‘nggi yillarda fraksion tartibli differensial tenglamalar uchun Kalman tipidagi boshqaruvchanlik mezonlari ishlab chiqilib, klassik rank shartlari fraksion hosila operatorlari uchun moslashtirilgan. Shuningdek, impulsli va kechikishli tizimlar uchun ham boshqaruvchanlikni ta’minlovchi yangi Kalman–Gram tipidagi shartlar taklif qilingan bo‘lib, ular shovqinli va sakrashli jarayonlar mavjud bo‘lgan tizimlarda qo‘llanmoqda [10].

Muhokama

Kalman mezonining nazariy ahamiyati

Kalman mezoni chiziqli tizimlar nazariyasida boshqaruvchanlikni chegaralovchi emas, balki to‘liq tavsiflovchi shart bo‘lib, uning soddaligi sababli o‘quv jarayonida ham, ilmiy izlanishlarda ham birinchi navbatda qo‘llaniladi. Bu mezon chiziqli tizimlarning realizatsiyasi, kanonik shakllari va minimal tartibli modellarini qurish nazariyasi bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib, ko‘plab sharh maqolalarida bu aloqalar batafsil yoritilgan [11].

Differensial-algebraik tizimlar va Kalman dekompozitsiyasi

Differensial-algebraik tenglamalar (DAT) bilan ifodalanuvchi tizimlar uchun klassik boshqaruvchanlik shartlarini bevosita qo‘llash har doim ham mumkin emas, shu bois, DAT uchun maxsus Kalman dekompozitsiyasi va boshqaruvchanlik bo‘yicha turli variantlar (komplet, kuchli va xulqiy boshqaruvchanlik) ishlab chiqilgan. Bunday yondashuvlar tizimni boshqaruvchan qism, klassik boshqarib bo‘lmaydigan qism va nomuvofiq holatlarni o‘z ichiga olgan xulqiy boshqaruvchan qismga ajratishga imkon berib, real jarayonlarda uchraydigan algebraik cheklovlarni inobatga oladi [12].

Katta o‘lchamli tarmoqlar va maqsadli boshqaruvchanlik

Katta o‘lchamli murakkab tarmoqlar (masalan, biologik tarmoqlar yoki texnologik jarayonlar tarmoqlari) uchun to‘liq holatni emas, balki faqat ma’lum maqsad tugunlarini boshqarish muammosi – “target controllability” – dolzarb hisoblanadi. So‘nggi ishlar ushbu muammoni yechish uchun Kalman boshqaruvchanlik shartini qanoatlantiruvchi tugunlar to‘plamini tanlashga asoslangan samarali algoritmlar, xususan, feed-forward greedy tipidagi yondashuvlarni taklif qilmoqda [13].

Amaliy jihatlar va MATLAB’dan foydalanish

MATLAB va unga o‘xshash muhitlarda boshqaruvchanlikni tekshirish, Kalman dekompozitsiyasini olish va optimal boshqaruvlarni hisoblash jarayonlarini avtomatlashtirish mumkin bo‘lib, bu o‘quv laboratoriyalarida ham, amaliy loyihalarda ham katta qulaylik yaratadi. Talabalar va muhandislar uchun Kalman mezoni bo‘yicha nazariy natijalarni dasturiy ta’minot yordamida bevosita tasdiqlash, parametrlar o‘zgarishining boshqaruvchanlikka ta’sirini tahlil qilish va

ISSN 3030-3907

zamonaviy umumlashtirilgan modellarga o‘tish bosqichma-bosqich amalga oshirilishi mumkin [14]

Xulosa

Chiziqli vaqt-invariant tizimlar uchun Kalman rank mezoni boshqaruvchanlikni tekshirishning asosiy va yetarli vositasi bo‘lib qolmoqda va u tizimning istalgan holatdan istalgan holatga chekli vaqt ichida o‘tish qobiliyatini formal ravishda ifodalaydi. Maqolada keltirilgan oddiy 2-tartibli tizim misolida, MATLAB yordamida boshqaruvchanlikni tekshirish algoritmi yoritildi va natijalar tizimning to‘liq boshqaruvchan ekanini ko‘rsatdi.

Zamonaviy tadqiqotlar Kalman mezonini fraksion tartibli, impulsli, kechikishli va differensial-algebraik tizimlarga, shuningdek, katta o‘lchamli tarmoqlar va maqsadli boshqaruvchanlik muammolariga umumlashtirishga qaratilgan bo‘lib, bu yo‘nalishlar nazariya va amaliyot o‘rtasidagi bog‘liqlikni yanada mustahkamlamoqda. Kelgusida chiziqli tizimlarning boshqaruvchanlik nazariyasini nolinear va stoxastik tizimlarga tadbiq etish, shuningdek, raqamli boshqaruv platformalarida energiya samarador boshqaruv algoritmlarini ishlab chiqish dolzarb ilmiy vazifa bo‘lib qoladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
2. Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice-Hall. 3. Chen, C.-T. (1999). *Linear system theory and design* (3rd ed.). Oxford University Press.
3. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2017). *Modern control systems* (13th ed.). Pearson.
4. MathWorks. (2023). *MATLAB Control System Toolbox documentation*. https://www.mathworks.com/help/control
5. Sontag, E. D. (2013). Kalman’s controllability rank condition: From linear to nonlinear. In *Essays on control: Perspectives in the theory and its applications* (pp. 453–462). Birkhäuser.
6. Riahi, A., & Tatar, N.-E. (2020). Basic control theory for linear fractional differential equations: Controllability and observability. *Frontiers in Physics, 8*, 377.
7. Li, Y., & Wang, J. (2020). Kalman rank criterion for the controllability of fractional impulse controlled systems. *IET Control Theory & Applications, 14*(17), 2349–2358.
8. Trenn, S., & Reis, T. (2014). Kalman controllability decompositions for differential-algebraic systems. *Systems & Control Letters, 70*, 21–31.
9. Klamka, J. (2013). Controllability of dynamical systems: A survey. *Archives of Control Sciences, 23*(3), 257–289.
10. Berg, T., & Reis, T. (2014). Controllability of linear differential-algebraic systems – A survey. In *Differential-Algebraic Equations Forum*. Springer.

ISSN 3030-3907

11. Eden, M., Farina, L., & Rinaldi, F. (2021). Positive output controllability of linear discrete-time invariant systems. *Control and Cybernetics, 50*(3), 327–352.
12. Zhang, H., Xu, T., & Li, X. (2024). Target controllability: A feed-forward greedy algorithm in complex networks. *Bioinformatics, 40*(11), btae630.
13. Kuo, B. C. (2012). *Automatic control systems* (9th ed.). Wiley.

ISSN 3030-3907