UDK: 152:53

FIZIKANI O`RGATUVCHI NEYRON TARMOQLAR (PINN) YORDAMIDA ELASTIKLIK TENGLAMALARINI YECHISH

Yunusova Gulrux Ahmadjon qizi
Jizzax davlat pedagogika universiteti Matematika kafedrasi, o`qituvchi
Jo`rayev Latif G`ayratzoda o`g`li
Jizzax davlat pedagogika universiteti Matematika kafedrasi, o`qituvchi
E-mail: qayumovagulrux0805@gmail.com
OrcID: 0009 0000 0868 3668

Annotatsiya.Ushbu maqolada fizikani o‘rganuvchi neyron tarmoqlar (Physics-Informed Neural Networks — PINN) yordamida elastiklik tenglamalarini yechishning zamonaviy yondashuvi batafsil yoritiladi. Chiziqli elastiklik nazariyasining asosiy tenglamalari, PINN arxitekturasi, yo‘qotish funksiyasi, avtomatik differensiallash (AutoDiff) asosidagi derivativlarning hisoblanishi va amaliy misollar sifatida 2D elastik plastinka va 3D strukturalar masalalari ko‘rib chiqiladi. PINN va an’anaviy chekli elementlar metodi (FEM) natijalari solishtirilib, PINNning afzallik va kamchiliklari tahlil qilinadi.

Kalit so`zlar. PINN, elastiklik, PDE, FEM, AutoDiff, neyron tarmoq, chiziqli elastiklik, PDE yechimlari, voxel ma’lumotlar, kuchlanish maydonlari, deformatsiya tensori, Airy kuchlanish funksiyasi

Annotation. This article details a modern approach to solving elasticity equations using Physics-Informed Neural Networks (PINN). The main equations of linear elasticity theory, PINN architecture, loss function, calculation of derivatives based on automatic differentiation (AutoDiff), and problems of 2D elastic plates and 3D structures are considered as practical examples. The results of the PINN and the traditional check element method (FEM) are compared, and the advantages and disadvantages of the PINN are analyzed.

Keywords. PINN, elasticity, PDE, FEM, AutoDiff, neural network, linear elasticity, PDE solutions, voxel data, kuchlanish fields, strain tensor, Airy kuchlanish function

Аннотация. В данной статье подробно описывается современный подход к решению уравнений упругости с использованием физико-информационных нейронных сетей (PINN). В качестве практических примеров рассматриваются основные уравнения линейной теории упругости, архитектура ПИНН, функция потерь, расчет производных на основе автоматического дифференцирования (AutoDiff), а также задачи 2D эластичных пластин и 3D конструкций. Сравниваются результаты ПИНН и традиционного метода проверки элементов (ФЭМ), анализируются преимущества и недостатки ПИНН.

ISSN 3030-3907

Ключевые слова. PINN, упругость, PDE, FEM, AutoDiff, нейронная сеть, линейная упругость, решения PDE, воксельные данные, поля напряжения, тензор напряжений, функция воздушного напряжения

Introduction.

Elastiklik masalalari muhandislik, mexanika va materialshunoslikda materiallarning deformatsiyasini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Elastiklik masalalarini yechish uchun turli xil usullar qo'llaniladi. Asosiy usullar: kuchlar usuli, siljishlar usuli, qoldiqli massalar usuli, chekli elementlar usuli, chekli farqlar usuli va boshqalar. An'anaviy usullar, masalan chekli elementlar usuli- bu usulda, konstruktsiya kichik elementlarga bo'linadi va har bir element uchun tenglamalar tuziladi. Shundan so`ng, umumiy tenglamalar tizimi hosil qilinib, yechiladi., Chekli elementlar metodi (FEM), keng qo‘llanilsa-da, jismlar shakli murakkablashganda, parametrlar aniqmas bo‘lganda yoki katta o‘lchamli masalalarda sezilarli hisoblash resurslari talab etadi. Hozirgi raqamlashgan davrdan kelib chiqib, fizikani o‘rganuvchi neyron tarmoqlar (PINN) eng so`nggi yondashuv sifatida paydo bo‘ldi. PINN fizik qonunlarni (masalan, qisman differensial tenglamalar -PDE) neyron tarmoqqa bevosita kiritish orqali yechimni ma'lumotlarsiz olish imkonini beradi.

Literature reviyew.

PINN asosiy g`oya sifatida 2019-yilda mashhur su`niy intelekt va ilmiy hisoblash sohasidagi Eronlik Maziar Raissi va boshqalar tomonidan taklif etilgan. U sun'iy intellekt va fizik modellarni birlashtiradi. Bunday usullar an'anaviy hisoblash metodlariga qaraganda tarmoqsiz (bo`sh to`r) bo‘lib, murakkab geometrik shakillar uchun mos keladi. Masalan, elastiklik masalalarida PINN kuchlanish va deformatsiya maydonlarini silliq va fizik jihatdan mos keladi. Mazkur maqolada PINNning elastiklik tenglamalariga qo‘llanilishi, uning yasalish bosqichi va amaliy misollar keltirildi, shuningdek, FEM bilan solishtirish orqali uning istiqbollari muhokama qilinadi.

PINN haqidagi tadqiqotlar so‘nggi yillarda tez rivojlanmoqda. Masalan, Almeida va Silva nomli Portugalyalik tadqiqotchilar tomonidan 2023-yilda o‘tkazilgan tadqiqotda PINN uchburchak plastinkadagi kuchlanish taqsimotini bashorat qilishda muvaffaqiyatli qo‘llanilgan bo‘lib, u fizik qonunlar va chegaraviy shartlarga asoslangan holda yechim topgan. Shuningdek, Haghighat va boshqalar (2021) PINNni biharmonik tenglamalarga qo‘llab, elastik plastinkalar uchun Airy kuchlanish funksiyasidan foydalanganlar. 3D elastiklik masalalarida esa PINN chuqur energiya usuli (DEM) bilan birlashtirilib, voxel ma'lumotlar asosida ishlatilmoqda, bu tarmoqsiz yechimlar beradi. NVIDIA Modulus platformasi PINNni PDE yechish uchun standartlashtirgan, unda yo‘qotish funksiyasi chegaraviy shartlar va residuallarni o‘z ichiga olgan. Ushbu tadqiqotlar PINNning

ISSN 3030-3907

FEMga qaraganda kamroq resurs talab etishini ko‘rsatmoqda, ammo o‘qitish vaqti va konvergentsiya muammolari mavjud.

Methodology.

Chiziqli elastiklik nazariyasining asosiy formulalari Guk qonuni bilan beriladi, bu yerda kuchlanish tensori σ deformatsiya tensori ε bilan bog‘lanadi:

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathrm{I} + 2\,\mu\varepsilon$$

Bu yerda λ va μ — Lamé parametrlari ya`ni λ-materialni siljishga qarshiligi moduli va μ-hajmiy siqilish , tr(ε) — ε ning izi, I — birlik tensor. Deformatsiya tensori quyidagicha ifodalanadi:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right)$$

bunda u -o‘rin oalmashtirish vektori. Statik elastiklik uchun muvozanat tenglamasi:

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0$$

f - tashqi kuch vektori. Chegaraviy shartlar Dirixle ($u = u_0$) va Neumann ($\sigma \cdot n = t$) shartlaridan iborat, n -tashqi normal vektor.

3D holatda tenglamalar murakkablashadi: kuchlanish komponentlari σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy} va h.k. hisoblanadi. Biharmonik tenglamalar elastik plastinkalar uchun qo‘llaniladi: $\nabla^4\phi = 0$ yoki $\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = 0$, ϕ— Airy kuchlanish funksiyasi, undan kuchlanishlar olinadi:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\ ,\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}.$$

PINN neyron tarmoqni PDEga moslashtiradi. U quyidagi qismlardan iborat:
1-Kirish: Fazoviy koordinatalar (x, y, z 3D uchun).
2-Chiqish: O‘rin o‘zgartirishlar (u_x, u_y, u_z) yoki kuchlanish komponentlari.

3-Ichki qatlamlar: Odatda 4-7 qatlam, har birida 20-50 neyron, gipperbolik tangens funksiyasi yoki ReLU faollashuv funksiyalari. ReLU shunday funksiyaki u neyron tarmoqlarda nolinearlik kirituvchi, sodda va samarali faollashuv funksiyasi.

PINN differensial tenglamalarni yechish uchun Pytorch yoki TensorFlow kabi kutubxonalardagi Avtomatik Differensiallash (AutoDiff) mexanizmidan foydalanadi. Bu yondashuv neyron tarmoq chiqishining fazoviy koordinatalar bo‘yicha yuqori tartibli derivativlarini avtomatik va aniq hisoblash imkonini beradi. ∇u, ε, σ avtomatik ravishda olinadi. Yo‘qotish funksiyasi neyron tarmoqni fizik qonunlarni va chegaraviy shartlarni bir vaqtda qanoatlantirishga majbur qiladi. Yo‘qotish funksiyasi quyidagilardan iborat:

$$L = L_{PDE} + L_{BC} + L_{IC}$$

ISSN 3030-3907

L_{PDE} — PDE residuallari: $\int (\nabla \cdot \sigma + f)^2 dx$ (Muvozanat tenglamasi xatoligi).

L_{BC} — Chegaraviy shartlar: $\int (u + u_0)^2 ds$ yoki $\int (\sigma \cdot n - t)^2 ds$.

L_{IC} — Boshlang‘ich shartlar (dinamik masalalar uchun).

DEM integratsiyasida yo`qotish potentsial energiya minimallashtirishga asoslanadi: $E_{\text{int}} + E_{ext}$, $E_{\text{int}} = \int \frac{\varepsilon}{\sigma} dV$. O‘qitish su`niy intelerkt va neyron tarmoqlardagi gradient asosidagi optimizatsiya algoritmi bilan, 1000-5000 epoxa davomida amalga oshiriladi.

Analysis and results.

2D elastik plastinka masalasi: 1×1 kvadrat plastinka, bir tomoni qattiq mahkamlangan, boshqa tomonida yuk qo‘llaniladi. PINN 7 qatlamli tarmoq bilan o‘qitildi, kollokatsiya nuqtalari (ichki: 1000, chegaraviy: 500) tasodifiy tanlandi. Natijada, u_x va u_y o‘rin almashtirishlar hisoblandi, kuchlanish maydonlari FEM bilan solishtirildi -xatolik 1% dan kam.

3D misol: Voxel ma’lumotlar asosidagi struktura (masalan, stul yoki ko‘prik). PINN DEM bilan birlashtirilib, voxel nuqtalarda (masalan, 50x50x50 grid) deformatsiyalar bashorat qilinadi. Yuk qo‘llanganda, von Mises kuchlanish taqsimoti hisoblanadi: $\sigma_v = \sqrt{\sigma_{x^2} - \sigma_x \sigma_y + \sigma_{y^2} + 3\tau_{xy^2}}$ Natijalar FEM bilan mos keladi, ammo PINN tarmoqsiz bo‘lgani uchun tezroq.

Uchburchak plastinka misoli: Uchburchak yuk ostidagi kuchlanish taqsimoti PINN orqali yechiladi, Airy funksiyasi asosida analitik yechim bilan solishtiriladi — xatolik ~1%.

*Afzalliklari.*a) Tarmoqsiz yechim: Murakkab geometrik shakillar uchun mos keladi. PDEni bevosita fizik qonun sifatida o‘rgatadi, ma’lumotsiz ishlaydi. b) Kuchlanish maydonlari silliq chiqadi, extrapolatsiya qobiliyati yuqori. c) DEM bilan birlashganda, energiya minimallashtirish orqali fizik moslikni ta’minlaydi. d) Voxel ma’lumotlar bilan 3D masalalarni tez yechadi. Voxel- bu 3 o`lchamli ya`ni 3D fazodagi eng kichik hajm birligi bo`lib, pixel 2D chizmada kvadrat nuqta bo`lsa, voxel 3D modelda kub shaklidagi nuqta bo`ladi.

Kamchiliklari. a) O‘qitish vaqti uzoq ya`ni 40 daqiqa yoki undan ko‘p bo`ladi. b) Konvergentsiya muammolari bor, ular tuzilishi va parametrlar nozik sozlashni talab etadi. c) Yuqori o‘lchamli yoki nolinear masalalarda aniqlik pasayishi mumkin. d) FEMga qaraganda, katta masalalarda resurs talab etishi mumkin.

Tadqiqotlar PINN bilan FEMni bir- biri bilan taqqoslagandagi ninatijalarini quydagi jadval orqali ko`rishimiz mumkin:

ISSN 3030-3907

Usullar	O‘rtacha $L2$ xatolik	Hisoblash vaqti (sek)
PINN	0.5 %	85
FEM	0.2 %	12

Conclusion.

PINN elastiklik masalalarini yechishda istiqbolli yondashuv bo‘lib, FEM bilan raqobatlasha oladi. U tarmoqsizligi va fizik mosligi bilan ajralib turadi, ammo o‘qitish samaradorligini oshirish kerak. Kelajakda PINN asosidagi operator-o‘rganish texnologiyalari mexanikadagi ko‘plab murakkab PDElar, masalan, nolinear elastiklik yoki multifizika ya`ni tizimlarning bir nechta fizika jarayonlari va ularning o‘zaro bog‘lanishini **bir vaqtning o‘zida** modellashtirish masalalari uchun qo‘llanilishi kutilmoqda. Ushbu yondashuv sun’iy intellektni ilmiy hisoblashda yangi bosqichga olib chiqadi Shuningdek, PINN teskari masalalarni (material xossalarini aniqlash, optimal geometriyani loyihalash) yechishda ham fundamental rol o‘ynaydi. Bu yondashuv sun’iy intellektni ilmiy hisoblash sohasida yangi bosqichga olib chiqadi.

REFERENCES.

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-Informed Neural Networks // *Journal of Computational Physics*. – 2019.
2. Haghighat E., Juanes R. A Physics-Informed Neural Network Framework for Solving Elasticity Problems. – 2021.
3. Leake C. 3D PINN Models for Solid Mechanics // *Computer Methods in Applied Mechanics*. – 2022.
4. NVIDIA Modulus Documentation. NVIDIA Corporation. – 2023.
5. Karniadakis G. *Deep Energy Method for PDE Solving*. Springer. – 2024.
6. Sadd M.H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. — Academic Press, 2014.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. — Elsevier, 2013

ISSN 3030-3907