ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Атабаев Камил
Доцент, Андижанского государственного технического института
E-mail: kamilaka2022@gmail.com

Аннотация. Приводятся аналитические решения задач о распространении одномерной и двумерной стационарной ударной волны в идеальной нелинейно-сжимаемой среде при воздействии интенсивных кратковременных нагрузок в виде взрывного импульса. Приводятся аналитические решения задач о распространении одномерной и двумерной стационарной ударной волны в идеальной нелинейно-сжимаемой среде при воздействии интенсивных кратковременных нагрузок в виде взрывного импульса. Рассматриваются одномерные нестационарные задачи о плоском и сферическом слое, а в двумерной постановке решается задача о воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость неупругой среды в случае, когда скорость D движущейся вдоль ее границы нагрузки превышает скорость распространения ударной волны в материале полуплоскости. Во всех задачах предполагается, что среда на фронте мгновенно нагружается нелинейным образом, а за фронтом в возмущенной области происходит линейная необратимая нагрузка.

Ключевые слова: волновое уравнение, волна разгрузки, фронт волна, профиль нагрузки, ударная волна, нелинейно-сжимаемая среда**.**

Annotatsiya. Maqolada portlovchi impuls ko'rinishidagi kuchli qisqa muddatli yuklar ta'sirida bir o'lchovli va ikki o'lchovli statsionar zarba to'lqinining ideal chiziqli bo'lmagan siqilgan muhitda tarqalishiga oid masalalarning analitik echimlari keltirilgan. Maqolada portlovchi impuls ko'rinishidagi kuchli qisqa muddatli yuklar ta'sirida bir o'lchovli va ikki o'lchovli statsionar zarba to'lqinining ideal chiziqli bo'lmagan siqilgan muhitda tarqalishiga oid masalalarning analitik echimlari keltirilgan. Yassi va sferik qatlamdagi bir o'lchovli statsionar bo'lmagan masalalar ko'rib chiqiladi va ikki o'lchovli formulada, agar uning chegarasi bo'ylab harakatlanadigan yukning tezligi D zarba to'lqinining yarim tekislikdagi tarqalish tezligidan oshib ketganda, harakatlanuvchi yukning noelastik muhitning yarim tekisligiga ta'siri bo'yicha masala hal qilinadi. Barcha masalalarda oldingi muhit bir zumda nochiziqli yuklanadi va buzilgan hududda old tomonning orqasida chiziqli qaytarilmas yuk mavjud deb taxmin qilinadi.

Kalit so'zlar: to'lqin tenglamasi, tushirish to'lqini, to'lqin fronti, yuk profili, zarba to'lqini, chiziqli bo'lmagan siqilgan muhit.

ISSN 3030-3907

Abstract. The paper presents analytical solutions to problems on the propagation of a one-dimensional and two-dimensional stationary shock wave in an ideal nonlinearly compressible medium under the action of intense short-term loads in the form of an explosive pulse. The paper presents analytical solutions to problems on the propagation of a one-dimensional and two-dimensional stationary shock wave in an ideal nonlinearly compressible medium under the action of intense short-term loads in the form of an explosive pulse. One-dimensional non-stationary problems on a flat and spherical layer are considered, and in a two-dimensional formulation, the problem on the effect of a moving load on a half-plane of an inelastic medium is solved in the case when the velocity D of the load moving along its boundary exceeds the velocity of propagation of the shock wave in the material of the half-plane. In all problems, it is assumed that the medium at the front is instantly loaded nonlinearly, and behind the front in the disturbed region there is a linear irreversible load.

Keywords: wave equation, unloading wave, wave front, load profile, shock wave, nonlinearly compressible medium.

Введение.

Приводятся аналитические решения задач о распространении одномерной и двумерной стационарной ударной волны в идеальной нелинейно-сжимаемой среде при воздействии интенсивных кратковременных нагрузок в виде взрывного импульса.

Рассматриваются одномерные нестационарные задачи о плоском и сферическом слое, а в двумерной постановке решается задача о воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость неупругой среды в случае, когда скорость D движущейся вдоль ее границы нагрузки превышает скорость распространения ударной волны в материале полуплоскости. Во всех задачах предполагается, что среда на фронте мгновенно нагружается нелинейным образом, а за фронтом в возмущенной области происходит линейная необратимая нагрузка (рис.1).

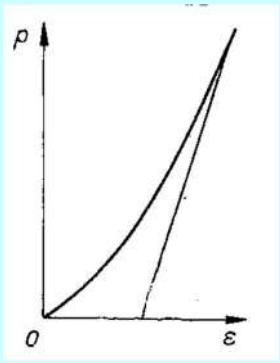


Рис. 1

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ. Такая постановка задач позволяет решить их обратным способом, т.е. задаться определенной формой (скоростью) поверхности фронта ударной волны и определить на границе слоя или полуплоскости соответствующий профиль нагрузки. В этом случае движение среды в области разгрузки описывается волновым уравнением относительно двух переменных, для него формулируется задача Коши, решение которой, как известно [1], существует и единственно. На конкретном примере рассмотрен случай, когда уравнение поверхности фронта волны задано в

ISSN 3030-3907

виде полинома второй степени относительно ξ и результаты расчетов сопоставлены с результатами, полученными на основе метода характеристик [2], которые дали удовлетворительное совпадение всех параметров среды. Аналогичными задачами занимались многие исследователи, в частности Н.Мамадалиев, А.Юсупов, Б.Донаев и другие.

Случай линейного нагружения и разгрузки среды для двумерной задачи рассмотрен в работах [3, 4]. Решение задачи о распространении сходящейся сферической и цилиндрической ударной волны в идеалной неупругой среде, обладающей жесткой разгрузкой, приводится в [5]. Рассматриваемы задачи могут иметь практические приложения при изучении интенсивных воздействий в водонасыщенных грунтах, а также в водоемах.

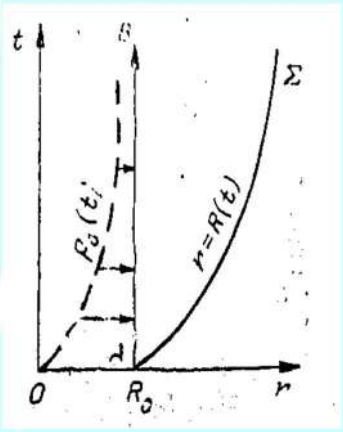


Рис.2

МЕТОДОЛОГИЯ. Пусть на границе слоя приложена монотонно убывающая нагрузка $p_0(t)$. Тогда в среде будет распространяться ударная волна с фронтом $r = R(t)$, за которым происходит разгрузка. В этом случае для возмущенной области имеем уравнения движения, неразрывности и состояния в виде

$$\textbf{(1.1)}\quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{t}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu u}{r}\right) = 0,$$

$$p(r,t) = p^* + E(\varepsilon - \varepsilon^*),$$

$$\text{Где} \qquad \varepsilon = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}; \quad E = c_p^2\rho.$$

На фронте $r = R(t)$ имеем соотношения вида

$$(1.2)\quad u^*(t) = \varepsilon^* R, \quad p^* = \rho^*\varepsilon^*\dot{R}^2, \; p^*(t) = \alpha_1\varepsilon^* + \alpha_2\varepsilon^{*2} \quad \left(\dot{R} = \frac{dR}{dt}\right).$$

К системе (1.1), (1.2) следует добавить граничное условие при $r = R_0$

$$(1.3)\qquad p = p_0(t).$$

Здесь u −массовая скорость; ρ −плотность; p −давление; ε −обьемная деформация; $\nu = 0; 2$ относятся соответственно к плоскому и сферическому слою; параметры среды, относящиеся к фронту, обозначены сверху звездочкой.

В случае плоской одномерной волны , т.е. при $\nu = 0$, из системы (1.1) можно получить уравнение

$$(1.4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0\,,$$

Имеющее решение вида

$$(1.5)\quad u(r,t) = f_1(r - c_p t) + f_2(r + c_p t),$$

Где неизвестные функции $f_i(\xi)$ $(i = 1, 2)$ определяются из граничного условия (1.3) с учетом (1.2). Как сказано выше, для решения этой задачи

ISSN 3030-3907

применяется обратный метод, т.е. считается заданным закон распространения ударной волны $r = R(t)$. Тогда все параметры среды, в том числе $u^*(t)$ и $\varepsilon^*(t)$ на фронте Σ с учетом (1.2), являются известными и имеют вид

$$(1.6) \qquad \varepsilon^*(t) = \frac{\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{2} - \sqrt{\frac{\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{4} - \frac{\rho_0\dot{R}^2-\alpha_1}{\alpha_2}},$$

$$u^*(t) = \dot{R}(t)\varepsilon^*(t).$$

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ. Таким образом, для волнового уравнения (1.4) в секторе $BA\Sigma$ (рис.2) получаем видоизмененную задачу Коши с заданными параметрами (1.6) на кривой $A\Sigma$, *в* которой первое равенство как бы заменяет условие для градиента скорости $u^*(t)$. Тогда из (1.6) с учетом (1.1), (1.5) для нахождения f_1' и f_2' имеют место формулы

$$(1.7) \quad f_1'\left[R(t)-c_pt\right] = -\frac{\ddot{R}}{2c_p}\left[\Delta_1(t) + \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}c_p\dot{R}}{\Delta_2(t)}\right],$$

$$f_2'\left[R(t)+c_pt\right] = \frac{\ddot{R}}{2c_p}\left[\Delta_1(t) - \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}c_p\dot{R}}{\Delta_2(t)}\right],$$

Где

$$\Delta_1(t) = \frac{\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{2} - \Delta_2(t);$$

$$\Delta_2(t) = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{4} - \frac{\rho_0\dot{R}^2-\alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Теперь с учетом (1.7), подставляя (1.5) в первое уравнение (1.1) и интегрируя по r от $r = R_0$ до $r = R(t)$ для определения нагрузки $p_0(t)$, получим

$$p_0(t) = p^*(t)$$
$$+\frac{p_0}{2}\left\{\int_{R_0}^{R(t)} \ddot{R}\left[F(z_1)\right]\left[\Delta_1\left(F(z_1)\right) + \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}c_p\dot{R}\left(F(z_1)\right)}{\Delta_2\left(F(z_1)\right)}\right]dr\right.$$
$$\left.+\int_{R_0}^{R(t)} \ddot{R}\left[F(z_2)\right]\left[\Delta_1\left(F(z_2)\right) - \frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}c_p\dot{R}\left(F(z_2)\right)}{\Delta_2\left(F(z_2)\right)}\right]dr\right\}$$

Где $z_{1,2} = r \mp c_pt$; $F\left(z_{1,2}\right)$ – корень уравнения $R(t) \mp c_pt = z_{1,2}$ относительно времени t.

ISSN 3030-3907

В случае сферической волны, т.е. при $\nu = 2$, из (1.2) имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2c_p^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) = 0,$$

Которое допускает решение вида

$$(1.8) \quad u(r,t) = \frac{\psi'(r-c_p t)+\Phi'(r+c_p t)}{r} - \frac{\psi(r-c_p t)+\Phi(r+c_p t)}{r^2},$$

Где штрих сверху означает производную по аргументу.

После некоторых преобразований из (1.6) с учетом (1.8) для нахождения $\psi''(z_1)$ и $\Phi''(z_2)$ получим

$$\psi''(z_1) = \psi''(R_0) + \int_{R_0}^{z_1} \Phi(\xi_1)d\xi_1,$$

$$(1.9) \quad \Phi''(z_2) = -\psi''[R\big(F(z_2)\big) - c_p F(z_2)] + 2\dot{R}\big(F(z_2)\big)\Delta_1(z_2) - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\dot{R}\big(F(z_2)\big)\ddot{R}\big(F(z_2)\big)}{\Delta_2(z_2)},$$

Где

$$\Phi(z_1) = -\frac{\dot{R}^3\big(F(z_1)\big)\Delta_1\big(F(z_1)\big)}{2c_p R(\dot{R} - c_p)}\left[1 + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}\left(6 + \frac{R\dddot{R}}{\dot{R}\ddot{R}}\right)\right] -$$

$$-\frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}R\dot{R}\ddot{R}^2}{2c_p\big(\dot{R} - c_p\big)\Delta_2\big(F(z_1)\big)}\left[2 + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \frac{c_p\big(\dot{R} + c_p\big)}{\dot{R}^2}\right] -$$

$$-\frac{\frac{\rho_0}{\alpha_2}R\dot{R}\ddot{R}^2}{2c_p\big(\dot{R} - c_p\big)\Delta_2^3\big(F(z_1)\big)}\left\{\Delta_2^2(F(z_1)\left[2 + \frac{\big(2\dot{R} + c_p\big)}{\dot{R}}\left(1 + 2\frac{\dot{R}^2}{R\ddot{R}} + \frac{\dot{R}\dddot{R}}{\ddot{R}^2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\rho_0}{\alpha_2}R(2\dot{R} + \dot{c}_p)\right\};$$

$\psi'(R_0), \psi''(R_0), \Phi'(R_0)$ определяются из условий (1.2) при $t \to 0$. Получение формулы для нагрузки $p_0(t)$ в случае сферической волны с учетом (1.9) аналогично случаю плоской волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Рассматриваемые задачи могут иметь практические приложения при изучении интенсивных воздействий в водонасыщенных грунтах, а также в водоемах.

СПИСОК ИСПОЛЬОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С. Г. Курс математической физики . М., «Наука»,1968.

2. Рахматулин Х.А., Мамадалиев Н. Распространение нелинейных волн в грунтовом полупространстве, вызванных бегущей по его границе нагрузкой. – В кн.: Труды симпозиума «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Таллин – Горький, 1973.

ISSN 3030-3907

3. Скобеев А. М., Флитман Л.М. подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости.- ПММ,1970,т.34, вып. 1, с.189-192.
4. Капустянский С. М. Распространение и отражение двумерных пластических волн «Изв. АН СССР. МТТ», 1973. №1. С.60-68.
5. Симонов И.В. О сходящейся ударной волне в идеально неупругой среде и устойчивости кумуляции. –ПМТФ, 1975, №5, С. 82-92.
6. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз,1961
7. Капустянский С. М. Распространение и отражение двумерных пластических волн / Изв. АН СССР. МТТ.— 1973.— № 1.
8. Айдосов А., Мамадалиев П., Хакимов У. О воздействии подвижной нагрузки на нелинейно-сжимаемую полосу с жестким основанием // ПМТФ.— 1986.— № 3.
9. Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов,— М.: Изд-во МГУ, 1964.
10. Атабаев К. О воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость // Докл. АН УзССР.— 1979.— № 9.
11. Рахматулин Х. А., Саатов Я. У., Сабодаш П. Ф., Филиппов И. Г. Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред.— Ташкент: Фан, 1969.г.

ISSN 3030-3907