МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С ЦЕЛЬЮ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

К.Р. Кодиров

Доцент университета Щёлкового пути и инновации,

E-mail: qahramon@rambler.ru

Annotatsiya. Maqolada ikki qatlamli muhitda massa ko‘chish jarayonining matematik modeli ishlab chiqildi va qo‘yilgan masalaning analitik yechimlari olindi. Bunda quduqlar galereyasi yordamida suv sathi va bosimni nazorat qilish orqali, zaharli ifloslantiruvchi moddalarning qatlamlarda tarqalishini nazorat qilish jarayo‘ni tadqiq etildi.

Kalit so'zlar: matematik model, analitik echim, hisoblash algoritmi, filtrasiya qatlami, zaharli moddalar, quduqlar galereyasi, geofiltr.

Аннотация. В статье разработана математическая модель процесса массопереноса в двухслойной среде и получено аналитические решения поставленной задачи. Исследован процесс управления распределением токсичных загрязняющих веществ в слоях путем регулирования уровня и давления воды с помощью галерее скважин.

Ключевые слова: математическая модел, аналитическое решение, вычислительных алгоритм, пластовая фильтрация, загрязняющие вещества, галерее скважин, двухслойная среда, геофильтрация.

Abstract. This article develops a mathematical model of mass transfer in a two-layer medium and obtains analytical solutions to the problem. The process of controlling the distribution of toxic pollutants in the layers by regulating the water level and pressure using a well gallery is studied.

Key words: mathematical model, analytical solution, computational algorithm, reservoir filtration, pollutants, well gallery, two-layer environment, geofiltration.

Введение.

В зоне орошаемого земледелия Узбекистана гидрогеологические профили обычно имеют слоистую структуру. Поэтому даже в гидравлической постановке и двухслойном строении грунта для описания физического процесса массопереноса приходится реализовать математическую модель с применением численных, аналитических или приближенно-аналитические методов [1,5,7,10,13-16].

Успешное решение различных прикладных задач в аграрном секторе и экологии обуславливается необходимостью учета геофильтрационных процессов. Одним из ключевых факторов, имеющих значительный интерес, здесь является взаимодействие поверхностных и подземных вод. Как показывает практика, при проектировании и эксплуатации

ISSN 3030-3907

гидромелиоративных объектов задачи водообмена регионального масштаба с сильным взаимодействием поверхностных и подземных вод возникают довольно часто [2,4,8,9].

Постановка задачи. Рассматривается двухслойная среда, в верхнем слое которой неизвестной является функция $y(x,t)$, а в нижнем слое $h(x,t)$. Массоперенос в такой среде будем описывать следующей системой уравнений в частных производных [3,6,11].

$$\left.\begin{aligned} -W_0\left(1-\frac{m_в-y}{m_в-y_{кр}}\right)+\varepsilon-\mu\frac{\partial y}{\partial t}=k_1\frac{y-h}{y} \\ \frac{1}{a}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{k_1}{T}\frac{y-h}{y} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где W_0 – испарение на поверхности земли; $m_в$, $k_1, \mu, y_{кр}, \varepsilon, a, T$ – физические константы; x – горизонтальная координата, направленная вдоль границы вправо; t – время.

Метод решения. Если ввести следующее обозначения

$$A_1=\frac{W_0}{m_в-y_{кр}},\quad A_2=\varepsilon+A_1 y_{кр},$$

и считать, что

$$h(x,t)=\varphi(t)y(x,t), \qquad (2)$$

то систему (1) можно привести в следующий вид

$$\left.\begin{aligned} A_2-A_1 y-\mu\frac{\partial y}{\partial t}=K_1[1-\phi(t)], \\ \frac{T}{a}\frac{\partial h}{\partial t}-T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=K_2[1-\phi(t)]. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Далее будем считать, что функция $y(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(x,t)=\alpha(t)(L-x)^2+\beta(t)(L-x)+\gamma(t), \qquad (4)$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ и $\gamma(t)$ подлежат определению, а L – правая граница.

Если граница $x=L$ является водонепроницаемой, то должны выполняться условия

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L}=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=L}=0. \qquad (5)$$

На основании (2.59) из (2.58) находим $\beta(t)\equiv 0$. Поэтому будем исходить из формулы

$$y(x,t)=\alpha(t)(L-x)^2+\gamma(t). \qquad (6)$$

Подставим во второе уравнение системы (3) выражение $h(x,t)$ из (2), тогда получим

ISSN 3030-3907

$$\frac{T}{a}\left[y(x,t)\frac{\partial y}{\partial t}+\varphi(t)\frac{\partial y}{\partial t}\right]-T\varphi(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=k_1[1-\varphi(t)]. \qquad (7)$$

Из (7) вычтем первое уравнение системы (3)

$$\frac{T}{a}\left[y(x,t)\frac{\partial y}{\partial t}+\varphi(t)\frac{\partial y}{\partial t}\right]-T\varphi(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+A_1 y(x,t)-A_2+\mu\frac{\partial y}{\partial t}=0. \qquad (8)$$

После подстановки (6) в (7), найдем

$$\frac{T}{a}\left\{\left[\alpha(t)(L-x)^2+\gamma(t)\right]\dot{\varphi}+\varphi(t)\left[\dot{\alpha}(L-x)^2+\dot{\gamma}\right]\right\}-2\alpha(t)\varphi(t)T+$$
$$+A_1\left[\alpha(t)(L-x)^2+\gamma(t)\right]-A_2+\mu\left[\dot{\alpha}(L-x)^2+\dot{\gamma}\right]=0.$$

В последнем уравнений перегруппируем члены и получим следующее уравнение:

$$\frac{T}{a}\left\{\left[\alpha(t)\dot{\varphi}+\varphi(t)\dot{\alpha}\right]+A_1\alpha(t)+\mu\dot{\alpha}\right\}(L-x)^2+$$
$$+\frac{T}{a}\left[\gamma(t)\dot{\phi}+\phi(t)\dot{\gamma}\right]-2\alpha(t)\phi(t)T+A_1\gamma(t)-A_2+\mu\dot{\gamma}=0.$$

Чтобы $y(x,t)$ было решением системы (3), необходимо одновременное выполнение условий:

$$\frac{T}{a}\left[\alpha(t)\dot{\varphi}+\varphi(t)\dot{\alpha}\right]+A_1\alpha(t)+\mu\dot{\alpha}=0, \qquad (9)$$

$$\frac{T}{a}\left[\gamma(t)\dot{\varphi}+\varphi(t)\dot{\gamma}\right]-2\alpha(t)\varphi(t)T+A_1\gamma(t)-A_2+\mu\dot{\gamma}=0. \qquad (10)$$

Здесь три неизвестных функций: $\alpha(t),\gamma(t)$ и $\varphi(t)$. Однако функцию $\varphi(t)$ можно задать таким образом, чтобы было возможным управлять физическим процессом при помощи определенных условий. Выберем, например

$$\varphi(t)=e^{-\sigma t}, \qquad (11)$$

где $\sigma>0$ – параметр, который является некоторым регулятором убыстрении или замедления физического процесса.

Подставляя (11) в (9) и в (10), найдем

$$(e^{-\sigma t}+A_4)\dot{\alpha}-(\sigma e^{-\sigma t}-A_3)\alpha(t)=0, \qquad (12)$$

$$(e^{-\sigma t}+A_4)\dot{\gamma}-(\sigma e^{-\sigma t}-A_3)\gamma(t)=\frac{2a\alpha(t)}{T}e^{-\sigma t}+A_5, \qquad (13)$$

где

$$A_3=\frac{aA_1}{T},\ A_4=\frac{a\mu}{T},\ A_5=\frac{aA_2}{T}.$$

Проинтегрируем уравнение (12), в результате получим

$$\ln\alpha=\int\frac{\sigma e^{-\sigma t}-A_3}{\sigma e^{-\sigma t}+A_4}dt.$$

ISSN 3030-3907

Так как $\varphi = e^{-\sigma t}$, то

$$d\phi = -\sigma\phi dt,\ dt = -\frac{dy}{\sigma\varphi},$$

$$\ln\alpha = -\frac{1}{\sigma}\int\frac{\sigma\varphi - A_3}{\varphi(\varphi + A_4)}d\varphi = -\int\frac{d\varphi}{\varphi + A_4} + \frac{A_3}{\sigma}\int\frac{d\varphi}{\varphi(\varphi + A_4)} = -\int\frac{d\varphi}{\varphi + A_4} +$$

$$+\frac{A_3}{\sigma A_4}\int\frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{A_3}{\sigma A_4}\int\frac{d\varphi}{\varphi + A_4} = \frac{A_3}{\sigma A_4}\ln\varphi - (1 + \frac{A_3}{\sigma A_4})\ln(\varphi + A_4) + \ln C_1.$$

Откуда потенцируя, найдем

$$\alpha(t) = \frac{C_1 e^{-A_6 t}}{\left(e^{-\sigma t} + A_4\right)^{1+\frac{A_6}{\sigma}}}, \qquad (14)$$

где $A_6 = \frac{A_3}{A_4}$.

В (13) обе части уравнения поделим на $e^{-\sigma t} + A_4$ и подставим значение $\alpha(t)$ из (14) и в результате получим

$$\dot{\gamma} - \frac{\sigma e^{-\sigma t} - A_3}{e^{-\sigma t} + A_4}\gamma = \frac{2aC_1 e^{-\sigma t(1+\frac{A_6}{\sigma})}}{(e^{-\sigma t} - A_4)^{2+\frac{A_6}{\sigma}}} + \frac{aA_2}{T(e^{-\sigma t} + A_4)}. \qquad (15)$$

Решение уравнения (15) складывается из решения однородного уравнения

$$\dot{\gamma} - \frac{\sigma e^{-\sigma t} - A_3}{e^{-\sigma t} + A_4}\gamma = 0 \qquad (16)$$

и частного решения неоднородного уравнения [11].

Аналогично (14) имеем

$$\gamma(t) = \frac{\tilde{c}_2 e^{-A_6 t}}{(e^{-\sigma t} + A_4)^{1+\frac{A_6}{\sigma}}}. \qquad (17)$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольной постоянной

$$\frac{e^{-A_6 t}}{\left(e^{-\sigma t} + A_4\right)^{1+\frac{A_6}{\sigma}}}\frac{d\tilde{C}_2}{dt} = \frac{2aC_1 e^{-\sigma t(1+\frac{A_6}{\sigma})}}{(e^{-\sigma t} + A_4)^{2+\frac{A_6}{\sigma}}} + \frac{aA_2}{T(e^{-\sigma t} + A_4)}$$

или

$$\frac{d\tilde{C}_2}{dt} = \frac{2aC_1 e^{-\sigma t}}{e^{-\sigma t} + A_4} + \frac{aA_2}{T}(1 + A_4 e^{\sigma t})^{\frac{A_6}{\sigma}}, \qquad (18)$$

откуда следует

ISSN 3030-3907

$$2aC_1\int\frac{e^{-\sigma t}}{e^{-\sigma t}+A_4}dt=\ln(e^{-\sigma t}+A_4)^{-\frac{2aC_1}{\sigma}}.$$

Обозначим $J=\frac{aA_2}{\sigma T}\int u^{-1}(1+A_4u)^{\frac{A_6}{\sigma}}du$. J содержит биномиальный дифференциал типа

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Здесь $m=-1;\ n=1;\ p=\frac{A_6}{\sigma};\ a=1;\ b=A_4$. За счет выбора σ придадим значению $p=\frac{A_6}{\sigma}$ сначала целые значения: $\frac{A_6}{\sigma}=1,2,3$.

Соответственно будем иметь

$$\sigma_1=A_6;\ \sigma_2=\frac{A_6}{2};\ \sigma_3=\frac{A_6}{3}\ \text{и}\ J_1=\frac{aA_2}{A_6T}\int\frac{1+A_4u}{u}du=\frac{aA_2}{A_6T}\{\ln u+A_4u\},$$

$$J_2=\frac{2aA_2}{A_6T}\int\frac{(1+A_4u)^2}{u}du=\frac{2aA_2}{A_6T}\left\{\ln u+2A_4u+\frac{A_4}{2}u^2\right\},$$

$$J_3=\frac{3aA_2}{A_6T}\left\{\ln u+3A_4^2u+\frac{3}{2}A_4u^2+\frac{1}{3}A_4^3u^3\right\}.$$

Теперь выберем $p=\frac{A_6}{\sigma}$ в виде дробных значений

$$\frac{A_6}{\sigma}=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \text{т.е}\ \sigma=2A_6,\ \sigma=3A_6,\quad J_{\frac{1}{2}}=\frac{aA_2}{2A_6T}\int u^{-1}(1+A_4u)^{\frac{1}{2}}du$$

.

В этом интеграле сделаем замену

$$\varsigma^2=1+A_4u,\ u=\frac{\varsigma^2-1}{A_4},\ du=\frac{2\varsigma d\varsigma}{A_4},$$

$$J_{\frac{1}{2}}=\frac{aA_2}{2A_6T}\int\frac{A_4}{J^2-1}\varsigma\frac{2\varsigma d\varsigma}{A_4}=\frac{aA_2}{A_6T}\int\frac{J^2d\varsigma}{J^2-1}=\frac{aA_2}{A_6T}\left[\varsigma+\ln\left(\frac{\varsigma-1}{\varsigma+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{aA_2}{A_6T}\left[\sqrt{1+A_4u}+\ln\sqrt{\frac{\sqrt{1+A_4u}-1}{\sqrt{1+A_4u}+1}}\right]=\frac{aA_2}{A_6T}\left[\sqrt{1+A_4u}+\ln\frac{\sqrt{1+A_4u}-1}{\sqrt{A_4u}}\right]=$$

$$=\frac{aA_2}{A_6T}\left[e^{A_6t}\sqrt{A_4+e^{-2A_6t}}+\ln\frac{e^{A_6t}\sqrt{A_4+e^{-2A_6t}}-1}{e^{A_6t}\sqrt{A_4}}\right],$$

ISSN 3030-3907

$$J_{\frac{1}{3}}=\frac{aA_2}{3A_6T}\int u^{-1}(1+A_4u)^{\frac{1}{3}}du,$$

$$v^3=1+A_4u,\ 3v^2dv=A_4du,\ u=\frac{v^3-1}{A_4},$$

$$J_{\frac{1}{3}}=\frac{aA_2}{3A_6T}\int\frac{A_4}{v^3-1}\frac{v}{A_4}u^{-1}\left(3v^2\right)dv=\frac{aA_2}{3A_6T}\int\frac{v^3dv}{v^3-1}=\frac{aA_2}{A_6T}\left\{v+\int\frac{v^3dv}{v^3-1}\right\},$$

$$\frac{1}{v^3-1}=\frac{A}{v-1}+\frac{Bv+C}{v^2+v+1},\ \frac{1}{(v-1)(v^2+v+1)}=\frac{A}{v-1}+\frac{Bv+C}{v^2+v+1},$$

$$Av^2+Av+A+Bv^2+Cv-Bv-C=0,A+B=0,$$

$$A-B+C=0,\ A-C=1,\ 2A+C=0,\ C=A-1,\ 2A+A-1=0,$$

$$A=\frac{1}{3},\ C=-\frac{2}{3},\ B=-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{(v-1)\left(v^2+v+1\right)}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{v-1}-\frac{v+2}{v^2+v+1}\right\}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{v-1}-\frac{1}{2}\frac{2v+1+3}{v^2+v+1}\right\}$$

$$\int\frac{v^3dv}{v^3-1}=\frac{1}{3}\left\{\ln(v-1)-\frac{1}{2}\ln\left[v^2+v+1\right]-\frac{3}{2}\int\frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$J_{\frac{1}{3}}=\frac{aA_2}{A_6T}\left\{\frac{1}{3}\ln(v-1)-\frac{1}{2}\ln\left[v^2+v+1\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\left(v+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right\}=$$

$$=\frac{aA_2}{A_6T}v+\frac{aA_2}{3A_6T}\ln\frac{v-1}{\sqrt{v^2+v+1}}-\frac{aA_2}{3A_6T}arctg\frac{2\left(v+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{aA_2}{A_6T}\sqrt[3]{1+A_4u}+\frac{aA_2}{3A_6T}\ln\frac{\sqrt[3]{1+A_4u}-1}{\sqrt{(1+A_4u)^{\frac{2}{3}}+(1+A_4u)^{\frac{1}{3}}+1}}-$$

$$-\frac{aA_2}{\sqrt{3}A_6T}arctg\frac{2\sqrt[3]{1+A_4u}-1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{aA_2}{A_6T}\left\{\sqrt[3]{1+A_4e^{3A_6t}}+\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt[3]{1+A_4e^{3A_6t}}-1}{\sqrt{\left(1+A_4e^{3A_6t}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+A_4e^{3A_6t}\right)^{\frac{1}{3}}+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt[3]{1+A_4e^{3A_6t}}+1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

ISSN 3030-3907

Для всех указанных значениях $\sigma_i : A_6; \frac{A_6}{2}; \frac{A_6}{3}; 2A_6; 3A_6$ решение принимает вид

$$h(x,t)=e^{-\sigma_i t}\left[\left[\frac{C_1 e^{-A_6 t}}{\left(e^{-\sigma_i t}+A_4\right)^{1+\frac{A_6}{\sigma_i}}}(L-x)^2+\frac{C_2 e^{-A_6 t}}{\left(e^{-\sigma_i t}+A_4\right)^{1+\frac{A_6}{\sigma_i}}}+\ln\left(e^{-\sigma_i t}+A_4\right)^{-\frac{2aC_1}{\sigma_i}}+J_j(t)\right]\right], \quad (19)$$

где $J_j : J_1, J_2, J_3, J_{\frac{1}{2}}, J_{\frac{1}{3}}$.

Значения C_1 и C_2 определяются из начальных условий при $t=0$. Допустим известны значения $y(0,0)=y_{\Gamma}$ – $y(L,0)=y_{\text{мд}}$. Тогда для нахождения произвольных констант будем иметь систему

$$\left.\begin{aligned} y_{\Gamma}&=\frac{C_1 L^2}{A_4^1+\frac{A_6}{\sigma_i}}+\frac{C_2 L^2}{A_4^1+\frac{A_6}{\sigma_i}}-\frac{2C_1}{\sigma_i}\ln A_4+J_j(0), \\ y_{\text{мд}}&=\frac{C_2}{A_4^1+\frac{A_6}{\sigma_i}}-\frac{2aC_1}{\sigma_i}\ln A_4+J_j(0). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Вычитая из второго уравнения (20) первое, найдем

$$c_1=\left(y_{\text{мд}}-y_{\Gamma}\right)\frac{A_4^{1+\frac{A_6}{\sigma_i}}}{L^2},$$

а из второго уравнения той же система находим

$$c_2=\left[y_{\text{мд}}+\frac{2a}{\sigma_i}\left(y_{\text{мд}}-y_{\Gamma}\right)\frac{A_4^{1+\frac{A_6}{\sigma_i}}}{L^2}-J_j(0)\right]A_4^{1+\frac{A_6}{\sigma_i}}.$$

После подстановки значений c_1 и c_2 в уравнение (19), найдена формула по какому закону необходимо управлять уровнем на галерее, чтобы приведенное решения было решением системы (1)

$$h_{\Gamma}=h(0,t)=e^{-\sigma_i t}\left[\frac{c_1 L^2 e^{-A_6 t}}{\left(e^{-\sigma_i t}+A_4\right)}+\frac{c_2 e^{-A_6 t}}{\left(e^{-\sigma_i t}+A_4\right)^{1+A_6/\sigma_i}}+\ln\left(e^{-\sigma_i t}+A_4\right)^{-\frac{2aC_1}{\sigma_i}}+J_j(t)\right].$$

Выводы: В итоге разработана математическая модель процесса массопереноса в двухслойной системе и получено аналитическое решение

ISSN 3030-3907

поставленной задачи, где учтен закон, необходимый для управления уровнем на галерее скважин, благодаря чему можно изолировать область распространения загрязняющих веществ в водоносных слоях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Abutaliyev F.B., Baklushin M.B., Karimberdiyeva S. Kodirov K. About modeling acceptance of the decision in some problems of the analysis and management of ecological process// World Conferensece on Intelligent Sustems for Industrial Automation: –Tashkent, –2000. –P. 290-294.
2. Hantush M.S. Flow to wells in aquiferr separated by a semipervies layer// J/Geophys. Res. –1967, 72. -№6, -p.1709-1719.
3. Абуталиев Ф.Б. Решение задач неустановившейся фильтрации. –Ташкент: Фан, 1972. –208 с.
4. Баклушин М.Б., Кодиров К.Р. Способ управления напором галерей скважин при нахождений уровня подземных вод со свободной поверхностью // Проблемы информатики и энергетики. –2009. –№1. –С. 31-35.
5. Кашеваров А.А. Итерационные алгоритмы решения задач взаимосвязи фильтрационных и русловых потоков. В сб.:Математическое моделирование гидрогеологических процессов/ Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1984, с.86-93.
6. Кодиров К.Р. Образование изолированной области в двухслойной среде с целью охраны окружающей среды // Инновация-2002: материалы междунар. науч. конф. –Ташкент, 2002. –С.283-284.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. –М.: Наука, 1965. –716 с.
8. Маскет М. (1949) Течение однородных жидкостей в пористых среде (пер. с анг.). М.-Л., Гостоптехиздат, 628 с.
9. Олейник А.Я. Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. –Киев: науково думка, 1978. –202 с.
10. Полубариново-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. –М.: Наука, 1977. –664 с.
11. Равшанов Н., Кодиров К., Нурмаматов Б.А. Математикческая модель неустановившейся фильтрации жидкости в трехслойном ограниченном пласте и ее аналитическое решение // Проблемы вычислительной и прикладной математики. –2023. –№6(53). –С. 23-37.
12. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент// Вестник АН СССР. –1979. -№5. –С. 38-49.
13. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. М.: Недра 1981, 304 с.

ISSN 3030-3907

14. Хантуш М.С. Новое в теории перетекания// Вопросы гидрогеологических расчетов. –М., «Мир», 1964. –С.43-60.
15. Чарный И.А. Основы подземной гидродинамики// -М.: 1964. –260 с.
16. Шестаков В.М. (1973) Динамика подземных вод. Моск. ун-т, 327 с.

ISSN 3030-3907