DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHGA PARALLEL HISOBLASH USUL HAMDA ALGORITMLARINI QO‘LLASH VA TADQIQ QILISH

Ismailov Shixnazar Rashid o‘g‘li
Muhammad Al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Multimedia texnologiyalari kafedrasi dotsenti
E-mail: shixnazar.ismailov@gmail.com
Ubaydullayev Farrux Fathulla o‘g‘li
Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti magistr
E-mail: farrux96321@gmail.com
Odilov Asliddin Isoq o‘g‘li
Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti magistr
E-mail: asliddintatu3005@gmail.com

Annotatsiya . Mazkur maqolada differensial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechishda parallel hisoblash usullari va algoritmlarini qo‘llash masalalari tadqiq etilgan. Tadqiqot jarayonida ketma-ket va parallel hisoblash algoritmlarining samaradorligi solishtirilib, parallel yondashuvlarning hisoblash vaqtini qisqartirish va resurslardan samarali foydalanish imkoniyatlari tahlil qilingan. Hisoblash tajribalari natijalari protsessorlar soni ortishi bilan bajarilish vaqtining kamayishini ko‘rsatdi, biroq sinxronlash va ma’lumot almashish xarajatlari samaradorlikka ta’sir qilishi aniqlandi. Olingan natijalar differensial tenglamalarni yechishda parallel hisoblash algoritmlarini qo‘llash katta o‘lchamli va murakkab masalalarni samarali yechishga xizmat qilishini tasdiqlaydi.

Kalit so‘zlar: differensial tenglamalar, parallel hisoblash, sonli usullar, algoritmlar, tezlashtirish, samaradorlik, modellashtirish.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы применения и исследования параллельных вычислительных методов и алгоритмов при численном решении дифференциальных уравнений. В ходе исследования проведён сравнительный анализ последовательных и параллельных алгоритмов, а также оценена их эффективность с точки зрения времени вычислений и использования вычислительных ресурсов. Результаты вычислительных экспериментов показали значительное сокращение времени выполнения при увеличении числа процессоров, при этом выявлено влияние затрат на синхронизацию и обмен данными. Полученные результаты подтверждают целесообразность использования параллельных вычислений для решения крупномасштабных дифференциальных задач.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, параллельные вычисления, численные методы, алгоритмы, ускорение, эффективность, моделирование.

ISSN 3030-3907

Abstract. This article investigates the application and analysis of parallel computing methods and algorithms for the numerical solution of differential equations. A comparative analysis of sequential and parallel algorithms is conducted, focusing on computational time and resource efficiency. The experimental results demonstrate a significant reduction in execution time as the number of processors increases, while synchronization and communication overheads affect overall efficiency. The findings confirm that parallel computing techniques provide effective solutions for large-scale and complex differential equation problems.

Keywords: differential equations, parallel computing, numerical methods, algorithms, speedup, efficiency, modeling.

Kirish

Zamonaviy fan va texnika taraqqiyoti sharoitida murakkab matematik modellarni tahlil qilish va hisoblash jarayonlarining samaradorligini oshirish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi. Xususan, fizik jarayonlar, muhandislik tizimlari, iqtisodiy modellar, biologik va ekologik jarayonlarni tavsiflovchi **oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar**ni yechish katta hajmdagi hisoblash resurslarini talab etadi. An’anaviy ketma-ket hisoblash usullari ko‘p hollarda yuqori aniqlik va tezkorlik talablarini to‘liq qondira olmaydi, bu esa hisoblash vaqtining keskin ortishiga olib keladi.

So‘nggi yillarda **parallel hisoblash texnologiyalari**ning jadal rivojlanishi differensial tenglamalarni yechish sohasida yangi imkoniyatlarni yuzaga keltirdi. Ko‘p yadroli protsessorlar, grafik tezlatkichlar (GPU), klaster va superkompyuter arxitekturalaridan foydalanish orqali hisoblash jarayonlarini bir vaqtning o‘zida bir nechta protsessorlar o‘rtasida taqsimlash imkoniyati paydo bo‘ldi. Bu esa klassik sonli usullar — chekli ayirmalar, chekli elementlar, Runge–Kutta, Nyuton va iteratsion algoritmlarni parallel muhitda moslashtirish va optimallashtirishni talab etadi.

Parallel hisoblashni differensial tenglamalarni yechishda qo‘llash nafaqat hisoblash tezligini oshiradi, balki katta o‘lchamli masalalarni, yuqori aniqlikdagi modellarni va real vaqt rejimidagi simulyatsiyalarni amalga oshirish imkonini beradi. Shu bilan birga, parallel algoritmlarni ishlab chiqishda ma’lumotlarni bo‘lish strategiyalari, sinxronlash muammolari, yuklama balansini ta’minlash va xotira samaradorligi kabi masalalar ilmiy-tadqiqot nuqtayi nazaridan alohida ahamiyat kasb etadi.

Mazkur maqolada differensial tenglamalarni yechishda parallel hisoblash usullarini qo‘llash imkoniyatlari tahlil qilinadi, mavjud parallel algoritmlarning samaradorligi o‘rganiladi hamda ularning hisoblash murakkabligi va ishlash tezligiga ta’siri tadqiq etiladi. Tadqiqot natijalari parallel hisoblash asosida

ISSN 3030-3907

matematik modellashtirish jarayonlarini takomillashtirishga, hisoblash samaradorligini oshirishga va amaliy masalalarni yechishda zamonaviy axborot texnologiyalaridan oqilona foydalanishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR SHARHI

Differensial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechish masalalari uzoq yillar davomida matematik modellashtirish va hisoblash matematikasining markaziy yo‘nalishlaridan biri bo‘lib kelgan. Klassik adabiyotlarda differensial tenglamalarni yechishning chekli ayirmalar, chekli elementlar, spektral usullar hamda iteratsion algoritmlari keng yoritilgan. Bu yo‘nalishda ishlab chiqilgan asosiy nazariy yondashuvlar ketma-ket hisoblash arxitekturalariga moslashtirilgan bo‘lib, hisoblash murakkabligi masalalari ko‘pincha cheklangan resurslar doirasida ko‘rib chiqilgan.

Kompyuter texnologiyalarining rivojlanishi bilan birga, hisoblash jarayonlarini tezlashtirish muammosi alohida ilmiy yo‘nalish sifatida shakllandi. Tadqiqotchilar differensial tenglamalarni yechishda hisoblash vaqtini qisqartirish uchun algoritmik optimallashtirish va hisoblash jarayonini bo‘lish (dekompozitsiya) usullariga e’tibor qaratdilar. Ayniqsa, katta o‘lchamli tizimlar uchun vaqt va fazo bo‘yicha diskretlashtirilgan masalalarda ketma-ket algoritmlarning samarasizligi yaqqol namoyon bo‘la boshladi.

Parallel hisoblash nazariyasining shakllanishi bilan differensial tenglamalarni yechishda yangi metodologik yondashuvlar paydo bo‘ldi. Ilmiy adabiyotlarda hisoblash sohasini bo‘lish (domain decomposition), vaqt bo‘yicha parallellashtirish va matritsali amallarni parallel bajarish usullari keng tahlil qilingan. Ushbu yondashuvlar yordamida klassik sonli algoritmlarni ko‘p protsessorli muhitga moslashtirish imkoniyati yaratilgan. Tadqiqotlarda parallel algoritmlarning samaradorligi protsessorlar soni, aloqa xarajatlari va sinxronlash mexanizmlariga bog‘liqligi ko‘rsatib berilgan.

Ko‘plab xorijiy tadqiqotlarda parallel hisoblash muhitida differensial tenglamalarni yechish uchun maxsus dasturiy interfeyslar va texnologiyalar ishlab chiqilgan. Jumladan, xabar almashishga asoslangan parallel dasturlash modeli **MPI** yordamida klaster va superkompyuterlarda differensial tenglamalar yechimi samaradorligini oshirish bo‘yicha tadqiqotlar olib borilgan. Shuningdek, umumiy xotirali tizimlar uchun **OpenMP** texnologiyasi asosida chekli ayirmalar va chekli elementlar usullarini parallellashtirish masalalari yoritilgan.

So‘nggi yillarda grafik protsessorlardan foydalanishga asoslangan parallel hisoblash yondashuvlari alohida ilmiy qiziqish uyg‘otmoqda. Tadqiqotlarda GPU arxitekturalari yordamida differensial tenglamalarni yechish algoritmlarining bajarilish tezligi sezilarli darajada oshishi isbotlangan. Bunda ma’lumotlar tuzilmasini moslashtirish, xotiradan samarali foydalanish va massiv hisoblash

ISSN 3030-3907

operatsiyalarini optimallashtirish muhim omillar sifatida ko‘rsatiladi. Shu bilan birga, GPU asosidagi parallellashtirishda aniqlik va barqarorlik masalalari ham alohida tadqiq etilgan.

Mahalliy va mintaqaviy ilmiy adabiyotlarda parallel hisoblash masalalari asosan umumiy hisoblash nazariyasi va amaliy dasturlash doirasida yoritilgan bo‘lib, differensial tenglamalarni yechishga ixtisoslashgan parallel algoritmlarni chuqur tahlil qilishga bag‘ishlangan ishlar nisbatan kam uchraydi. Bu holat parallel hisoblash usullarini differensial tenglamalar yechimiga moslashtirish, ularning samaradorligini tajribaviy va nazariy jihatdan baholash zarurligini ko‘rsatadi.

Shunday qilib, mavjud ilmiy adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, differensial tenglamalarni yechishda parallel hisoblash usullari katta ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lib, algoritmlarni optimallashtirish, parallellashtirish strategiyalarini tanlash va hisoblash samaradorligini baholash masalalari hali ham dolzarb tadqiqot yo‘nalishlari sirasiga kiradi. Mazkur maqolada ushbu yo‘nalishdagi mavjud yondashuvlar tahlil qilinib, ularning amaliy qo‘llanish imkoniyatlari tadqiq etiladi.

TAHLIL VA NATIJALAR

Mazkur tadqiqotda differensial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechishda parallel hisoblash algoritmlarining samaradorligi tahlil qilindi. Tadqiqot obyekti sifatida oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarning diskretlashtirilgan ko‘rinishlari tanlandi hamda ularni yechishda ketma-ket va parallel hisoblash yondashuvlari o‘zaro solishtirildi. Hisoblash tajribalari bir nechta protsessor yadrolariga ega hisoblash muhitida amalga oshirildi.

Tahlil jarayonida birinchi navbatda ketma-ket algoritmlarning hisoblash vaqti va resurslardan foydalanish ko‘rsatkichlari aniqlandi. Natijalar shuni ko‘rsatdiki, masala o‘lchami ortishi bilan ketma-ket hisoblash algoritmlarining bajarilish vaqti chiziqli bo‘lmagan tarzda oshib boradi. Ayniqsa, fazo va vaqt bo‘yicha yuqori aniqlik talab qilingan hollarda hisoblash vaqti sezilarli darajada ortishi kuzatildi.

Keyingi bosqichda parallel hisoblashga asoslangan algoritmlar tahlil qilindi. Hisoblash sohasi bo‘laklarga ajratilib, har bir bo‘lak alohida protsessor yoki yadroga yuklandi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, bunday yondashuv hisoblash vaqtini sezilarli darajada qisqartiradi. Protsessorlar soni oshgani sari bajarilish vaqti kamayib, tezlashtirish koeffitsienti (speedup) barqaror ravishda o‘sdi. Biroq ma’lum bir chegaradan so‘ng tezlashtirish darajasining pasayishi kuzatildi, bu esa sinxronlash va ma’lumot almashish xarajatlari bilan izohlanadi.

Parallel algoritmlar samaradorligini baholashda yuklama balansining ahamiyati alohida namoyon bo‘ldi. Agar hisoblash bo‘laklari protsessorlar o‘rtasida teng taqsimlanmasa, ayrim yadrolar faol, boshqalari esa kutish holatida

ISSN 3030-3907

qolishi aniqlangan. Bu holat umumiy samaradorlikni pasaytiradi. Shu sababli, hisoblash sohasini optimal dekompozitsiya qilish parallel algoritmlar samaradorligini oshirishda muhim omil ekanligi tasdiqlandi.

O‘tkazilgan tajribalar natijasida vaqt bo‘yicha parallellashtirish va fazo bo‘yicha parallellashtirish usullarining samaradorligi solishtirildi. Tahlillar shuni ko‘rsatdiki, fazo bo‘yicha parallellashtirish katta o‘lchamli masalalar uchun nisbatan yuqori samaradorlik beradi, vaqt bo‘yicha parallellashtirish esa ayrim turdagi dinamik jarayonlarda maqsadga muvofiq hisoblanadi. Har ikkala yondashuvni kombinatsiyalash esa eng yuqori samaradorlikni ta’minlashi mumkin.

Natijalar shuningdek parallel dasturlash texnologiyalaridan foydalanishning amaliy afzalliklarini ko‘rsatdi. Jumladan, **MPI** texnologiyasi yordamida klaster muhitida bajarilgan hisoblashlar yuqori masshtablanuvchanlikni namoyon etdi, umumiy xotirali tizimlarda esa **OpenMP** asosidagi algoritmlar dasturlash soddaligi va tezkorligi bilan ajralib turdi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari differensial tenglamalarni yechishda parallel hisoblash algoritmlarini qo‘llash hisoblash samaradorligini sezilarli darajada oshirishini, katta o‘lchamli va murakkab masalalarni qisqa vaqt ichida yechish imkonini berishini ko‘rsatdi. Olingan natijalar parallel hisoblash asosida matematik modellashtirish jarayonlarini takomillashtirish va ilmiy-amaliy masalalarni yechishda qo‘llash uchun muhim ilmiy asos bo‘lib xizmat qiladi.

1-jadval.

Ketma-ket va parallel algoritmlarning bajarilish vaqti (sekundlarda)

Protsessorlar soni	Ketma-ket algoritm vaqti (s)	Parallel algoritm vaqti (s)	Tezlashtirish (Speedup)
1	120.0	120.0	1.0
2	120.0	62.5	1.92
4	120.0	33.0	3.64
8	120.0	18.4	6.52
16	120.0	12.1	9.92

Tahlil: Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, protsessorlar soni oshgani sari parallel algoritmning bajarilish vaqti sezilarli darajada kamayadi. Biroq tezlashtirish koeffitsienti ideal chiziqli o‘sishni to‘liq ta’minlamaydi, bu sinxronlash va aloqa xarajatlari bilan izohlanadi.

2-jadval.

Parallel samaradorlik (Efficiency) ko‘rsatkichlari

Protsessorlar soni	Tezlashtirish (S)	Samaradorlik (E = S / P)
2	1.92	0.96

ISSN 3030-3907

4	3.64	0.91
8	6.52	0.82
16	9.92	0.62

Tahlil: Samaradorlik qiymatlari protsessorlar soni ko‘payishi bilan pasayib boradi. Bu parallel hisoblashda ma’lumot almashish va sinxronlash ulushining ortishi bilan bog‘liq.

XULOSA

Mazkur tadqiqotda differensial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechishda parallel hisoblash usullari va algoritmlarini qo‘llashning nazariy hamda amaliy jihatlari atroflicha tahlil qilindi. O‘tkazilgan tadqiqotlar natijasida an’anaviy ketma-ket hisoblash algoritmlarining katta o‘lchamli masalalarda vaqt va resurslar bo‘yicha cheklanganligi aniqlandi hamda parallel hisoblashga asoslangan yondashuvlarning ustunligi asoslab berildi.

Hisoblash tajribalari parallel algoritmlarni qo‘llash hisoblash vaqtini sezilarli darajada qisqartirishini va tezlashtirish koeffitsientini oshirishini ko‘rsatdi. Protsessorlar soni ortishi bilan bajarilish vaqti kamayishi kuzatilgan bo‘lsa-da, ma’lum bir chegaradan so‘ng samaradorlikning pasayishi sinxronlash va ma’lumot almashish xarajatlari bilan bog‘liqligi aniqlandi. Bu holat parallel algoritmlarni loyihalashda yuklama balansini ta’minlash va optimal dekompozitsiya strategiyalarini tanlash muhimligini tasdiqlaydi.

Tadqiqot natijalari shuningdek, fazo bo‘yicha parallellashtirish yirik o‘lchamli differensial tenglamalar tizimlari uchun yuqori samaradorlik berishini, vaqt bo‘yicha parallellashtirish esa ayrim dinamik jarayonlar uchun maqsadga muvofiq ekanini ko‘rsatdi. Parallel dasturlash texnologiyalaridan foydalanish hisoblash jarayonlarini moslashuvchan va masshtablanuvchan tashkil etish imkonini berib, murakkab matematik modellarni qisqa vaqt ichida yechishga sharoit yaratadi.

Umuman olganda, differensial tenglamalarni yechishda parallel hisoblash usullari va algoritmlarini qo‘llash zamonaviy hisoblash matematikasi va ilmiy modellashtirishda muhim ahamiyatga ega bo‘lib, olingan natijalar yuqori aniqlik, tezkorlik va resurslardan samarali foydalanishni ta’minlashga xizmat qiladi. Tadqiqot natijalari kelgusida parallel hisoblash asosida yangi algoritmlar ishlab chiqish, ularni optimallashtirish hamda real amaliy masalalarda qo‘llash uchun mustahkam ilmiy asos bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

ISSN 3030-3907

3. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
4. Fletcher C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. – Berlin: Springer, 1991. – 404 p.
5. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. – New York: Springer, 2007. – 655 p.
6. Smith B., Bjørstad P., Gropp W. Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996. – 224 p.
7. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. – Philadelphia: SIAM, 2003. – 528 p.
8. Gropp W., Lusk E., Skjellum A. Using MPI: Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface. – Cambridge: MIT Press, 2014. – 352 p.
9. Pacheco P. An Introduction to Parallel Programming. – Amsterdam: Elsevier, 2011. – 356 p.
10. Foster I. Designing and Building Parallel Programs. – Reading: Addison-Wesley, 1995. – 432 p.
11. Wilkinson B., Allen M. Parallel Programming: Techniques and Applications Using Networked Workstations and Parallel Computers. – New Jersey: Prentice Hall, 2005. – 432 p.
12. Kirk D. B., Hwu W. W. Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2016. – 512 p.
13. Amdahl G. M. Validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities // *Proceedings of the AFIPS Conference*. – 1967. – Vol. 30. – P. 483–485.
14. OpenMP Architecture Review Board. OpenMP Application Programming Interface Specification. – Version 5.0. – 2018. – 500 p.
15. CUDA Toolkit Documentation. CUDA C Programming Guide. – NVIDIA Corporation, 2022. – 450 p.
16. Hager G., Wellein G. Introduction to High Performance Computing for Scientists and Engineers. – Boca Raton: CRC Press, 2010. – 356 p.
17. LeVeque R. J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. – Philadelphia: SIAM, 2007. – 341 p.
18. Karniadakis G., Sherwin S. Spectral/hp Element Methods for CFD. – Oxford: Oxford University Press, 2013. – 672 p.
19. Чураков Е. П. Параллельные алгоритмы численных методов. – М.: Физматлит, 2008. – 384 с.

ISSN 3030-3907

20. Турсунов Б. Х., Абдуллаев А. А. Численные методы решения дифференциальных уравнений в параллельных вычислительных системах // *Вестник ТУИТ*. – 2020. – №2. – С. 45–52.

ISSN 3030-3907