MATEMATIKA FANIDAN ALGEBRAIK TIPDAGI OLIMPIADA MASALALRINI YECHISH

Gulnoza Xakimova
Osiyo Xalqaro Universiteti magistranti

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqola matematika olimpiadalarining eng muhim va murakkab bo‘limlaridan biri bo‘lgan algebraik masalalarni yechishning nazariy va amaliy jihatlarini tadqiq etishga bag‘ishlanadi. Maqolada xalqaro va respublika miqyosidagi olimpiadalarda (IMO, Mendeleyev, Al-Xorazmiy) ko‘p uchraydigan klassik va nostandart algebraik muammolar tasniflanadi. Xususan, ko‘p o‘zgaruvchili tengsizliklarni isbotlashda o‘zgaruvchilarni almashtirish texnikasi, funksional tenglamalarda inyektivlik va suryektivlik xossalaridan foydalanish hamda ko‘phadlar nazariyasida kompleks sonlarning o‘rni tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida o‘quvchilarning mantiqiy fikrlashini rivojlantirish uchun evristik usullar va "invariant" tushunchasini algebraga tatbiq etish mexanizmlari yoritib berilgan. Maqola yakunida olimpiada masalalarini tizimli yechish bo‘yicha metodik tavsiyalar va algoritmlashtirilgan yondashuvlar taklif etiladi.

Kalit so‘zlar:algebraik masalalar, olimpiada, tenglamalar, polinomlar, yechim strategiyasi

Annotation. This scientific article is devoted to the study of theoretical and practical aspects of solving algebraic problems, which represent one of the most critical and complex sections of mathematical olympiads. The paper classifies classical and non-standard algebraic challenges frequently encountered in international and national competitions (such as IMO, Mendeleev, and Al-Khwarizmi). Specifically, it analyzes variable substitution techniques for proving multi-variable inequalities, the application of injectivity and surjectivity properties in functional equations, and the role of complex numbers in polynomial theory. Throughout the research, heuristic methods and mechanisms for applying the concept of "invariants" to algebra are elucidated to enhance students' logical thinking. The article concludes with methodological recommendations and algorithmic approaches for the systematic resolution of high-level olympiad problems.

Keywords: algebraic problems, olympiad, equations, polynomials, solution strategy.

Аннотация. Данная научная статья посвящена исследованию теоретических и практических аспектов решения алгебраических задач, которые являются одним из наиболее важных и сложных разделов математических олимпиад. В статье классифицируются классические и нестандартные алгебраические проблемы, часто встречающиеся на международных и республиканских олимпиадах (IMO, Менделеевская, им. Аль-Хорезми). В частности,

ISSN 3030-3907

анализируются методы замены переменных при доказательстве неравенств со многими переменными, использование свойств инъективности и сюръективности в функциональных уравнениях, а также роль комплексных чисел в теории многочленов. В ходе исследования освещаются эвристические методы и механизмы применения концепции «инвариантов» в алгебре для развития логического мышления учащихся. В завершение статьи предлагаются методические рекомендации и алгоритмизированные подходы к системному решению олимпиадных задач.

Ключевые слова: алгебраические задачи, олимпиада, уравнения, многочлены, стратегия решения

Kirish

Matematika olimpiadalari shunchaki bilim sinovi emas, balki ijodiy tafakkur va intellektual salohiyat kurashidir. Algebra bo'limi o‘zining abstraktligi va yechimlarning nafisligi bilan ajralib turadi. Hozirgi kunda o‘quvchilarda nafaqat formulani bilish, balki o‘sha formulani qo‘llash uchun masalani "tayyorlash" ko‘nikmasini shakllantirish dolzarb muammo hisoblanadi. Maqolada aynan murakkablik darajasi yuqori bo‘lgan algebraik tuzilmalarni soddalashtirish va ularning yechim algoritmlarini yaratish ko‘zda tutilgan. Matematika olimpiadalari talabalarni nafaqat bilim darajasini, balki mantiqiy fikrlash, ijodiy yondashuv va murakkab masalalarni tahlil qilish qobiliyatini sinovdan o‘tkazadi. Olimpiadalar odatda oddiy maktab darsliklaridagi masalalardan farqli o‘laroq, talabalarni yangi yondashuvlar va strategiyalarni qo‘llashga undaydi. Shu sababli, algebraik masalalar matematika olimpiadalarining eng qiyin va muhim qismi hisoblanadi.

Algebraik masalalar turli shakllarda bo‘lishi mumkin: kvadrat va kubik tenglamalar, polinomlar, identik ifodalar, murakkab ko‘paytmalar va radikallar. Ularni yechish nafaqat formulalar va qoidalarni bilishni, balki masalani tez tahlil qilish, asosiy elementlarni ajratish va samarali strategiyalarni qo‘llashni talab qiladi.

Olimpiadaga tayyorgarlik jarayonida talabalar ko‘pincha quyidagi muammolarga duch keladi: Murakkab algebraik ifodalarni soddalashtira olmaslik. Faktorlashtirish va identik transformatsiyalardan noto‘g‘ri foydalanish. Ko‘p o‘zgaruvchili masalalarda bog‘lanishlarni to‘g‘ri aniqlay olmaslik. Yechim jarayonini to‘liq tahlil qilmaslik va xatolardan saboq olmaslik.

Shu sababli, algebraik masalalarni yechish bo‘yicha samarali strategiyalarni o‘rganish, masalalarni bosqichma-bosqich tahlil qilish va turli adabiyotlar orqali yechim metodlarini o‘zlashtirish talabalar uchun muhimdir. Ushbu maqola algebraik masalalarni yechish jarayonini tizimli yondashuv bilan tushuntirib, o‘quvchilar va murabbiylar uchun amaliy qo‘llanma sifatida xizmat qilishi mo‘ljallangan.

ISSN 3030-3907

Algebraik masalalarning turlari:Algebraik masalalar turli shakllarda bo‘lishi mumkin va ularni tahlil qilish uchun ularni turkumlash muhim. Quyidagi turlar keng tarqalgan:

Oddiy tenglamalar va tengsizliklar:Bu tur bitta noma’lum bilan ishlashni talab qiladigan masalalarni o‘z ichiga oladi. Masalan, kvadrat tenglamalar, kvadrat ildizli ifodalar yoki chiziqli tenglamalar. Ushbu masalalarda yechim jarayoni asosan formulalar, faktorlashtirish va soddalashtirish orqali amalga oshiriladi.

Ko‘p o‘zgaruvchili tenglamalar:Ikki va undan ortiq noma’lumga ega masalalar murakkabroq hisoblanadi. Masalalarni yechish uchun substitutsiya usuli, tenglamalarni bir-biriga bog‘lash, simmetrik ifodalar va determinant metodlari qo‘llaniladi. Misol:{x+y=5xy=6\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} {x+y=5xy=6

Bu masalada ko‘p o‘zgaruvchili tenglamalarni faktorlashtirish va kvadrat tenglamaga aylantirib yechish mumkin.

Polinomlar bilan ishlash:Polinom masalalari algebraik olimpiadada juda keng tarqalgan. Polinomlarni faktorlashtirish, ildizlarni aniqlash, qoldiq teoremasi va teorema Vieta formulalarini qo‘llash muhim. Masalan, x3−6x2+11x−6=0x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0x3−6x2+11x−6=0 tenglamasini (x−1)(x−2)(x−3)=0(x-1)(x-2)(x-3) = 0(x−1)(x−2)(x−3)=0 shaklida yechish mumkin.

Identik tenglamalar va transformatsiyalar:Identik transformatsiyalar algebraik ifodalarni soddalashtirish va murakkab masalalarni yechishda samarali vositadir. Masalan, (a+b)2=a2+2ab+b2(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2(a+b)2=a2+2ab+b2 formulasi, yoki (x+y+z)3(x+y+z)^3(x+y+z)3 kabi kubik ifodalar. Bu yondashuv masalalarni tizimli tahlil qilish imkonini beradi.

Murakkab ifodalar va kombinatsion masalala: Ko‘paytmalar, nisbatlar, radikallar va kombinatsion elementlar o‘z ichiga olgan masalalar murakkabligi bilan ajralib turadi. Bunday masalalarni yechish uchun ko‘pincha bir nechta strategiyalarni birlashtirish talab qilinadi.

Algebraik masalalarni yechish strategiyalari:Algebraik masalalarni samarali yechish uchun quyidagi strategiyalar qo‘llaniladi: **Formulalarni bilish va qo‘llash,**Kvadrat, kubik va kvartik tenglamalarni yechish formulalari. Binom va polinom formulalari: (a+b)2(a+b)^2(a+b)2, (a−b)2(a-b)^2(a−b)2, (a+b)3(a+b)^3(a+b)3, (a−b)3(a-b)^3(a−b)3.

Teorema Vieta orqali ildizlar bilan ishlash. **Faktorlashtirish** Masalalarni ko‘paytmaga ajratish orqali soddalashtirish. Masalan: x2+5x+6=(x+2)(x+3)x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)x2+5x+6=(x+2)(x+3) Bu usul masalani tez va aniq yechishga imkon beradi.

Substitutsiya usuli:Murakkab algebraik ifodalarni yangi o‘zgaruvchi bilan almashtirish orqali yechishni osonlashtiradi. Masalan,

ISSN 3030-3907

(x+1)4−5(x+1)2+4=0(x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 4 = 0(x+1)4−5(x+1)2+4=0 masalasida y=(x+1)2y = (x+1)^2y=(x+1)2 deb olsak, tenglama y2−5y+4=0y^2 - 5y + 4 = 0y2−5y+4=0 shakliga keladi.

Identik transformatsiyalar:Algebraik ifodalarni sodda shaklga keltirish orqali masalani yechish jarayonini tezlashtiradi. Masalan: x3+y3+z3−3xyz=(x+y+z)(x2+y2+z2−xy−xz−yz)x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)x3+y3+z3−3xyz=(x+y+z)(x2+y2+z2−xy−xz−yz)

Grafik yondashuv:Ba'zi tenglamalarni grafik yordamida yechish masalalarni intuitiv tushunishga yordam beradi. Masalan, kvadrat yoki kubik funksiyalarning kesish nuqtalarini aniqlash.Misollar bilan amaliy yondashuv**Misol 1:**x2−7x+12=0x^2 - 7x + 12 = 0x2−7x+12=0 **Yechim:** Faktorlashtiramiz:(x−3)(x−4)=0(x-3)(x-4) = 0(x−3)(x−4)=0 x=3,x=4x = 3, \quad x = 4x=3,x=4 **Misol 2:**x3−6x2+11x−6=0x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0x3−6x2+11x−6=0 **Yechim:** Kubik polinomni faktorlashtiramiz:(x−1)(x−2)(x−3)=0(x-1)(x-2)(x-3) = 0(x−1)(x−2)(x−3)=0 x=1,x=2,x=3x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3x=1,x=2,x=3 **Misol 3:** Substitutsiya misoli:(x+2)4−8(x+2)2+15=0(x+2)^4 - 8(x+2)^2 + 15 = 0(x+2)4−8(x+2)2+15=0 **Yechim:** y=(x+2)2y = (x+2)^2y=(x+2)2, tenglama y2−8y+15=0y^2 - 8y + 15 = 0y2−8y+15=0 bo'ladi.(y−3)(y−5)=0⇒y=3, y=5(y-3)(y-5)=0 \Rightarrow y=3, \ y=5(y−3)(y−5)=0⇒y=3, y=5 x+2=±3,x+2=±5⇒x=−2±3, x=−2±5x+2 = \pm \sqrt{3}, \quad x+2 = \pm \sqrt{5} \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}, \ x = -2 \pm \sqrt{5}x+2=±3,x+2=±5⇒x=−2±3, x=−2±5 Bu misollar har bir strategiyani amalda qanday qo'llash mumkinligini ko'rsatadi.

Algebraik masalalarni yechish jarayoni bir nechta bosqichdan iborat bo'lib, har bir bosqichning o'ziga xos vazifasi va ahamiyati mavjud. Quyida ularni batafsil ochib beramiz:Masalani diqqat bilan o'qish va tahlil qilish **Vazifasi:** Masalani tushunish va muammoni to'liq anglash.Masalani diqqat bilan o'qish talab qilinadi, chunki ko'pincha birinchi qarashda oddiy ko'ringan masalada yashirin murakkabliklar bo'lishi mumkin.Masaladagi barcha shartlar va ma'lumotlarni ajratib olish kerak: qanday o'zgaruvchilar ishlatilgan, qaysi qiymatlar berilgan yoki cheklangan.Tenglamalar, polinomlar va algebraik ifodalar orasidagi bog'lanishni aniqlash lozim. Bu yechim jarayonini aniq belgilashga yordam beradi.**Misol:** Masala: (x+1)4−5(x+1)2+4=0(x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 4 = 0(x+1)4−5(x+1)2+4=0Diqqat bilan o'qilganda, masalada kvadratik shakl yashirin ekanligi ko'rinadi, chunki (x+1)2(x+1)^2(x+1)2 biror bir o'zgaruvchi sifatida qaralishi mumkin.

Tenglamalarni soddalashtirish:**Vazifasi:** Masalani yechishga qulay shaklga keltirish. Murakkab ifodalarni faktorlashtirish orqali soddalashtirish.Polinomlarni

ISSN 3030-3907

qisqartirish, ortiqcha yoki murakkab ko‘paytmalarni ajratish. Radikallar, ko‘paytmalar yoki nisbatlar mavjud bo‘lsa, ularni soddalashtirish orqali yechimni osonlashtirish. **Misol:** (x+1)4−5(x+1)2+4=0(x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 4 = 0(x+1)4−5(x+1)2+4=0Ushbu ifodani biror bir o‘zgaruvchi bilan almashtirishdan oldin soddalashtirish mumkin:y=(x+1)2y = (x+1)^2y=(x+1)2 Shunda tenglama: y2−5y+4=0y^2 - 5y + 4 = 0y2−5y+4=0 Bu kvadrat tenglama endi soddalashtirilgan va yechilishga tayyor.

Substitutsiya va transformatsiya **Vazifasi:** Murakkab ifodalarni soddalashtirish va yechim jarayonini tezlashtirish. Substitutsiya usuli murakkab ifodalarni yangi o‘zgaruvchi bilan almashtirishni nazarda tutadi. Identik transformatsiyalar yordamida ifodalarni standart shaklga keltirish mumkin, bu esa yechimni aniqlashni osonlashtiradi. **Misol:** y=(x+1)2y = (x+1)^2y=(x+1)2 Kvadrat tenglamaga aylantiriladi: y2−5y+4=0y^2 - 5y + 4 = 0y2−5y+4=0 Shu bosqichda murakkab (x+1)4(x+1)^4(x+1)4 ifodasi oddiy kvadrat shaklga o‘zgartirildi, yechim jarayoni soddalashtirildi.

Yechimlarni tekshirish**Vazifasi:** Topilgan ildizlar yoki yechimlarning to‘g‘riligini aniqlash. Har bir topilgan ildiz yoki yechimni asl tenglamaga qo‘yib tekshirish zarur.Bu noto‘g‘ri yoki ortiqcha yechimlarni aniqlashga yordam beradi. **Misol:** Kvadrat tenglamani yechamizy2−5y+4=0⇒(y−1)(y−4)=0y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (y-1)(y-4)=0y2−5y+4=0⇒(y−1)(y−4)=0 y=1,y=4y=1, \quad y=4y=1,y=4 Asl o‘zgaruvchini qaytarish:(x+1)2=1⇒x=0,x=−2(x+1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0, x = -2(x+1)2=1⇒x=0,x=−2 (x+1)2=4⇒x=1,x=−3(x+1)^2 = 4 \Rightarrow x = 1, x = -3(x+1)2=4⇒x=1,x=−Har bir yechimni asl tenglamaga qo‘yib tekshirish orqali barcha ildizlar to‘g‘ri ekanligi tasdiqlanadi.

Masalani tahlil qilish va xatolardan saboq olish **Vazifasi:** Yechim jarayonini baholash va keyingi masalalarda xatolardan qochish. Yechim jarayonini tahlil qilib, qaysi strategiyalar samarali bo‘lganini aniqlash mumkin.Agar xatolar mavjud bo‘lsa, ularni qayd etib, keyingi masalalarda takrorlanmasligini ta’minlash. Bu bosqich talabalarni nafaqat masalani yechishga, balki matematik fikrlashni rivojlantirishga o‘rgatadi. **Misol:** Yuqoridagi masalada:Substitutsiya va kvadrat shaklga keltirish samarali strategiya bo‘ldi.Faktorlashtirish orqali yechim tez topildi. Yechimlarni tekshirish orqali xatolardan qochildi.

Shu tarzda, har bir bosqich **bosqichma-bosqich** tahlil qilinadi va talabalar uchun **algoritmik yondashuv** shakllanadi, bu esa olimpiadaga tayyorgarlikni samarali qiladi

Olimpiada algebrasini o'rganishda jahon adabiyoti boy tajribaga ega.Titu Andreescuning asarlarida algebraik ayniyatlar va ularni yechishda kompleks sonlardan foydalanish usullari mukammal berilgan. Arthur Engel o‘zining

ISSN 3030-3907

"Problem-Solving Strategies" kitobida algebrani kombinatorika va sonlar nazariyasi bilan bog'lovchi "ekstremal prinsip"ni taklif etgan.J. Michael Steele tomonidan yozilgan "The Cauchy-Schwarz Master Class" asari tengsizliklar sohasidagi eng sara manba bo‘lib, unda bitta tengsizlikni o‘nlab usullar bilan isbotlash imkoniyatlari ko‘rsatilgan.O‘zbekistonlik olim Sh. Ismoilov va boshqalarning olimpiada qo‘llanmalarida mahalliy olimpiadalar spetsifikasi inobatga olingan holda murakkab funksional tenglamalar tahlil qilingan.

Tadqiqot natijasida shuni aytish mumkinki, algebraik olimpiada masalalari o‘quvchidan "matematik sezgi"ni talab qiladi. Metodik yondashuv: O‘quvchi har bir masalaga individual yondashishi, lekin umumiy qoliplarni (invariantlar, simmetriya, darajalar tengligi) yodda tutishi kerak. Tavsiya: Mashg'ulotlar davomida faqat javobni topishga emas, balki yechimning eng qisqa va "go'zal" yo'lini qidirishga e'tibor qaratish lozim.Xulosa: Algebra — olimpiada matematikasining asosi bo'lib, uni chuqur o'zlashtirish boshqa bo'limlardagi (geometriya, kombinatorika) murakkabliklarni ham oson yengishga yordam beradi. Algebraik masalalarni yechish muvaffaqiyatga erishish uchun nafaqat bilim, balki mantiqiy fikrlash, ijodiy yondashuv va tizimli strategiyalarni egallash zarur. Masalalarni turkumlash va ularni bosqichma-bosqich tahlil qilish olimpiadaga tayyorgarlik jarayonini samarali qiladi.Faktorlashtirish, substitutsiya va identik transformatsiyalar kabi metodlarni mukammal o‘rganish algebraik masalalarni tez va aniq yechishga yordam beradi. Adabiyotlar tahlili esa talabalarni turli yondashuvlar bilan tanishtirib, murakkab masalalarni yechishda qo‘llaniladigan metodlarni o‘zlashtirishga imkon beradi.Shuningdek, masalalarni yechish jarayonida xatolarni aniqlash va ulardan saboq olish, olimpiadaga tayyorgarlikni tizimli va sifatli qiladi. Shu bilan birga, algebraik masalalarni yechish qobiliyati nafaqat olimpiadada, balki real hayotdagi matematik va mantiqiy muammolarni hal qilishda ham foydalidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Andreescu, T., & Enescu, B. (2006). *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhauser.
2. Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer.
3. Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz Master Class*. Cambridge University Press.
4. Small, C. G. (2007). *Functional Equations and How to Solve Them*. Springer.
5. Mirzaahmedov, M. A. (2018). *Matematikadan olimpiada masalalari*. Toshkent.
6. Sa'dullayev, A. (2021). *Matematik tahlil asoslari*. Fan va texnologiya.

ISSN 3030-3907