ELLIPTIK TIPLI TENGLAMALAR VA LAPLAS TENGLAMASINING TEKISLIKDA VA FAZODAGI FUNDAMENTAL YECHIMLARI

Otajonova Sitorabonu Shuxratovna
Osiyo xalqaro universiteti "Umumtexnik fanlar" kafedrasi o'qituvchisi
Tel: +998939627477
E-mail: sitorabonuotajonova@gmail.com

Annotatsiya. Bu maqolada qo'yilgan masala korrekt qo'yilmagan masalalar qatoriga kiradi ya'ni uning yechimida turg'unlik sharti buziladi. Agar A.N. Tixonov teoremasidan foydalansak, ya'ni masalaning yechimlar sinfini kompakt to'plamgacha qisqartirsak, u holda yechim shartli korrekt bo'ladi. Shartli korrekt masalalarni esa Karleman funksiyalarni tuzish yordamida yechimi aniqlanadi. Birinchi marta analitik funksiyalar uchun Koshi masalasini yechishda Karleman funksiyasi yordamida Goluzin va Krilovlar tomonidan chegaralangan sohada masalaning yechimi keltirilgan. Bunday masalani Laplas tenglamasi uchun akademik M.M. Lavrentev tomonidan yechilgan. Xuddi shunday masalani professor Sh.Yarmuxamedov tomonidan Karleman funksiyasini oshkor ravishda keltirilgan.

Kalit so'zlar: elliptik, korrekt masalalar, Laplas tenglamasi, funksiyalar, elementar yechim, fundamental yechim, Neyman masalasi.

Аннотация. В данной статье поставленная задача относится к классу некорректно поставленных задач, то есть при её решении нарушается условие устойчивости. Если воспользоваться теоремой А. Н. Тихонова, то есть сузить класс решений задачи до компактного множества, то задача становится условно корректной. Решения условно корректных задач могут быть найдены с помощью построения функций Карлемана. Впервые при решении задачи Коши для аналитических функций с использованием функции Карлемана Гольузиным и Крыловым было получено решение задачи в ограниченной области. Аналогичная задача для уравнения Лапласа была решена академиком М. М. Лаврентьевым. Подобная задача также была рассмотрена профессором Ш. Ярмухамедовым, который привёл явное выражение функции Карлемана.

Ключевые слова: эллиптические, корректно поставленные задачи, уравнение Лапласа, функции, элементарное решение, фундаментальное решение, задача Неймана.

Abstract. In this article, the formulated problem belongs to the class of ill-posed problems, that is, the stability condition is violated in its solution. If one applies A. N. Tikhonov's theorem, namely, restricts the class of solutions to a compact set, then the problem becomes conditionally well-posed. The solutions of conditionally well-posed problems can be determined by constructing Carleman functions. For

ISSN 3030-3907

the first time, in solving the Cauchy problem for analytic functions using a Carleman function, Goluzin and Krylov obtained a solution of the problem in a bounded domain. A similar problem for the Laplace equation was solved by Academician M. M. Lavrentiev. An analogous problem was also studied by Professor Sh. Yarmukhamedov, who provided an explicit form of the Carleman function.

Keywords. elliptic, well-posed problems, Laplace equation, functions, elementary solution, fundamental solution, Neumann problem.

KIRISH

Bu maqolada elliptik tipli tenglamalar uchun asosiy chegaraviy masalalar keltirilgan. Bunda elliptik tipli tenglamalar uchun Laplas va Puasson tenglamalari haqida aytilgan. Laplas tenglamasining fundamental yechimlari keltirilgan. Elliptik tipdagi tenglamalardan eng soddasi va muhimi Laplas va Puasson tenglamalari ko‘rsatilgan. Birinchi va ikkinchi formulalari ko‘rsatilgan, garmonik funksiyalar va ularning xossalari keltirilgan. Gelmgols tenglamasi uchun integral formula keltirilgan. Gelmgols tenglamasining fundamental yechimlari va Grin funksiyasi keltirilgan.

1.1. Elliptik tipli tenglamalar va ularga qo‘yilgan masalalar

Aytaylik, $D \subset E^n$ fazoda chekli soha bo‘lib, uning chegarasi $S = \partial D$ bo‘laklari silliq sirtdan iborat bo‘lsin. $E^n - \overline{D}$ ni D_1 orqali belgilab olamiz, ya’ni

$$D_1 = E^n - \overline{D}.$$

Dirixlening ichki masalasi. D sohada garmonik $\overline{D} = D \bigcup S$ da uzluksiz va

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D \qquad (1.1)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x)$ funksiya topilsin.

Dirixlening tashqi masalasi. D_1 sohada garmonik shunday $u(x)$ funksiya topilsinki, u S da berilgan uzluksiz qiymatlarni qabul qilib, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D_1 \qquad (1.2)$$

$|x| \to \infty$ da $n > 2$ bo‘lgan holda $|x|^{2-n}$ dan sekin bo‘lmay nolga intilsin, $n = 2$ da esa chekli limitga intilsin.

Neymanning ichki masalasi. D sohada garmonik $D \bigcup S$ da o‘zining birinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz bo‘lgan $u(x)$ funksiya topilsinki, uning normal bo‘yicha olingan hosilasi S da avvaldan berilgan qiymatlarga teng bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D, \qquad (1.3)$$

ISSN 3030-3907

bu yerda $\vec{n} - S$ ga o‘tkazilgan normal.

Neymanning tashqi masalasi. D sohada garmonik shunday $u(x)$ funksiya topilsinki, uning normal bo‘yicha olingan hosilasi S da avvaldan berilgan qiymatlarni qabul qilsin, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi(x_0),\ x_0 \in S,\ x \in D_1, \qquad (1.4)$$

hamda funksiyaning o‘zi cheksiz uzoqlashgan nuqtada $n>2$ bo‘lgan holda nolga, $n=2$ da esa chekli limitga intilsin.

Dirixlening ichki va tashqi masalalari bittadan ortiq yechimga ega bo‘lmaydi.

Haqiqattan ham, bu masalalar bir xil chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi 2 ta u_1 va u_2 yechimga ega bo‘lsin. U holda, $u = u_1 - u_2$ funksiya (1.1) tenglamani va $u|_S = 0$ shartni qanoatlantiradi. Avval ichki masalani ko‘ramiz. Ekstremum prinsipining ikkinchi natijasiga ko‘ra barcha D sohada $u \equiv 0$ bo‘ladi, demak $u_1 = u_2$.

Endi tashqi masalani tekshiramiz.

Avval $n>2$ bo‘lsin. Shartga asosan $u(x)$ funksiya D_1 sohada garmonik, shu bilan birga $u|_S = 0$ va x nuqta koordinata boshidan yetarli uzoqlashganda $|u(x)| \le \frac{C}{|x|^{n-2}},\ C = const,$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Markazi koordinata boshida va radiusi R ga teng bo‘lgan hamda S sirtni to‘la o‘z ichiga olgan S_R sferani olamiz. $u(x)$ funksiyani S sirt va S_R sfera bilan chegaralangan D_R sohada qaraymiz. Agar radius yetarli kata bo‘lsa, S_R sferada $|u(x)| \le \frac{C}{R^{n-2}}$ tengsizlik bajariladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz va R ni shunday kata qilib tanlaymizki, $CR^{n-2} < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. D_R sohada $u(x)$ funksiya o‘zining eng kata va eng kichik qiymatlarida yoki S da, yoki S_R da erishadi, demak, bu qiymatlar modul bo‘yicha ε dan kichik emas. $x - D_1$ sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Yetarli katta R da bu nuqta D_R ga tushadi, shuning uchun ham $|u| < \varepsilon$. Ammo ε – ixtiyoriy musbat son bo‘lganligi sababli $u(x) = 0$, demak $u_1(x) = u_2(x)$.

Agar $n=2$ bo‘lsa, conform almashtirish (masalan kasr chiziqli) natijasida cheksiz sohani chekli sohaga o‘tkazish mumkin. Bunda Laplas tenglamasi yana Laplas tenglamasiga, cheksiz sohada garmonik bo‘lgan $u(x)$ funksiya esa chekli sohada garmonik bo‘lgan funksiyaga o‘tadi va bu funksiya sohaning chegarasida

ISSN 3030-3907

nolga teng bo‘ladi. Shunday qilib, cheksiz soha uchun Dirixle masalasi yechimining yagonaligi isbot qilingan chekli sohadagi Dirixle masalasiga keladi.

Laplas tenglamasi uchun Neymanning ichki masalasi o‘zgarmas son aniqligida topiladi, ya’ni masalaning ikkita yechimi bir-biridan o‘zgarmas son bilan farq qiladi.

Agar fazoning o‘lchovi $n>2$ bo‘lsa, u holda Neymanning tashqi masalasi bittadan ortiq yechimga ega bo‘lmaydi.

Bu fikrning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish uchun yuqorida kiritilgan chegaralari S va S_R dan iborat bo‘lgan D_R sohaga $\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx=\int_S u(y)\frac{\partial u}{\partial n}ds$ formulani qo‘yamiz.

S_R sfera bo‘yicha olingan integralni baholaymiz. R yetarli katta bo‘lganda

$$|u(x)|<\frac{A}{|x|^{n-2}},\quad |D^i u|<\frac{A}{|x|^{n-2+i}},\quad n\geq 3 \text{ ga ko‘ra}$$

$$|u(x)|\leq\frac{C}{R^{n-2}},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leq\frac{C_1}{R^{n-1}},\quad C,C_1-const$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. U holda

$$\left|\int_{S_R} u\frac{\partial u}{\partial n}dS_R\right|\leq\frac{CC_1|S_R|}{R^{2n-3}}=\frac{CC_1|S_1|}{R^{n-2}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0$ bo‘lgani uchun formuladagi S bo‘yicha olingan integral nolga teng.

Shunday qilib, $R\to\infty$ da

$$\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\to 0.$$

Demak, $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ldots,n,\ u=const$. Ammo $|x|\to\infty$ da $u\to\infty$ uchun, $u=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar $n=2$ bo‘lsa, Neymanning tashqi masalasi o‘zgarmas son aniqligida topiladi.

Bu holda ham xuddi yuqoridagidek, $u=const$ tenglikka ega bo‘lamiz. Chekli uzoqlashgan nuqtada $n=2$ da garmonik funksiya chegaralangan bo‘lgani uchun, yuqoridagi fikrimizning to‘g‘riligiga darhol ishonch hosil qilamiz.

1.2. Laplas tenglamasining tekislikda va fazodagi fundamental yechimlari

Elliptik tipdagi tenglamalardan eng soddasi va muhimi Laplas

ISSN 3030-3907

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{2.1}$$

va Puasson

$$\Delta u = f(x) \tag{2.2}$$

tenglamalaridir.

E^n fazodagi ikki $x=(x_1,...,x_n)$, $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ nuqta orasidagi masofani r orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$r = |x-\xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2}.$$

Bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, ushbu

$$E(x,\xi) = \begin{cases} r^{2-n}, & n>2 \\ \ln\frac{1}{r}, & n=2 \end{cases} \tag{2.3}$$

funksiya $x \neq \xi$ bo'lganda x bo'yicha ham, ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

Haqiqatan,

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = (2-n) r^{1-n} \frac{\partial r}{\partial x_i} = (2-n) r^{1-n} \frac{x_i - \xi_i}{r} = (2-n) r^{-n} (x_i - \xi_i),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = (2-n) r^{-n} - (2-n) n r^{-n-2} (x_i - \xi_i)^2.$$

Oxirgi ifodani (2.1) tenglamaning chap tomoniga olib borib qo'yamiz. U holda

$$\Delta E = n(2-n) r^{-n} - n(2-n) r^{-n-2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2 = 0.$$

Xuddi shunga o'xshash $n=2$ hol tekshirib ko'riladi. $E(x,\xi)$ funksiya x va ξ ga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun bu funksiya $x \neq \xi$ da ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi deb aytishimiz mumkin.

(2.3) formula bilan aniqlangan $E(x,\xi)$ funksiyani Laplas tenglamasining *elementar* yoki *fundamental yechimi* deyiladi.

Cheksizlikda

$$E(x,\xi) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$$

baho o'rinli bo'ladi.

ISSN 3030-3907

Haqiqatan ham, $E(x,\xi)$ funksiyaning yetarli katta $|x|$ lardagi qiymati qiziqtirayotgani uchun $|x|>2|\xi|$ deb olishimiz mumkin.

U holda

$$r=|x-\xi|\geq|x|-|\xi|$$

tengsizlikka asosan, $|\xi|<\frac{|x|}{2}$ bo‘lgani uchun $|r|>\frac{|x|}{2}$ tengsizlik kelib chiqadi.

Bundan darhol

$$E(x,\xi)=\frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Ma’lumki, qiymatlari ikki nuqta o‘rtasidagi masofa r ga bog‘liq bo‘lgan Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi $u(r)$ funksiyalar orasida $C_1E(x,\xi)+C_2$ ko‘rinishdagi funksiyalardan boshqa funksiya mavjud emas, bunda C_1,C_2 – o‘zgarmas sonlar.

Faraz qilaylik, shunday funksiya mavjud bo‘lsin, ya’ni $u(x)=\lambda(r)$. Bu funksiyadan x_i o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i-\xi_i}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\left[1-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2}\right].$$

Bu hosilalarni (2.1) tenglamaga qo‘ysak, Laplas tenglamasi o‘rniga

$$\lambda''+\frac{n-1}{r}\lambda'=0$$

oddiy differensial tenglama hosil bo‘ladi.

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$C_1E(x,\xi)+C_2$$

dan iboratdir.

XULOSA

Ushbu maqolada fazoda birinchi tartibli elliptik tipli sistema uchun Koshi masalasining yechimi chegaralangan soha chegarasining bir qismida berilganlaridan foydalanib sohaning ichida topish masalasi keltirilgan. Bunda prof.Sh.Yarmuxamedov metodidan foydalanib birinchi tartibli elliptik tipli sistemalar uchun Koshi masalasining yechimi topildi.

ISSN 3030-3907

Elliptik tipli tenglamalar va ularga qo‘yilgan masalalar ko‘rsatildi, bunda Dirixlening ichki va tashqi masalasi, hamda Neymanning ichki va tashqi masalasi qaraldi. Elliptik tipdagi tenglamalardan Laplas tenglamasining tekislikda va fazodagi fundamental yechimlari ko‘rildi. Gelmgols tenglamasi va u uchun integral formula ko‘rsatildi. Tenglama yechimining fizik ma’nosi keltirildi. Gelmgols tenglamasining fundamental yechimlari va yechimlarning integral tasviri, hamda Grin funktsiyasi ko‘rsatildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Z. Malikov*, *S.Sh. Otajonova*. Uch o‘lchovli fazoda elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining regulyarizatsiyasi, “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari” xalqaro ilmiy-amaliy anjuman materiallari, 11-12 may 2022-yil Buxoro.

2. *З. Маликов*, *С.Ш. Отажонова.* Задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка в специальной ограниченной области в трехмерной области, “International Scientific Journal Science and innovation” Series A Volume 1 Issue

3. Ш. Ярмухамедов, А. Абдукаримов, З. Маликов. “О Задачи Коши для системе эллиптического типа первого порядка”. Докл. Росс. -Акад. Наук. Том 323 (1992) №1.

4. Otajonova, S. S. (2025). INTERACTIVE METHODS IN TEACHING MATHEMATICS TO PRIMARY SCHOOL STUDENTS: FOSTERING ENGAGEMENT AND CONCEPTUAL UNDERSTANDING. PEDAGOGIK TADQIQOTLAR JURNALI, 2(2), 84-87.

5. Shukhratovna, O. S. (2025). ORGANIZING INTERESTING GAMES FOR ELEMENTARY GRADES USING ELEMENTS OF COMBINATORICS. PEDAGOGIK TADQIQOTLAR JURNALI, 3(2), 117-119.

ISSN 3030-3907