ОБ ОДНОМ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Махмуд Махаммадович Сайдаматов
Университет геологических наук кандидат
E-mail: m.saydamatov@unigeo.uzb,
https://orcid.org/0009-0007-0121-9492
Уткир Бердиевич Мардиев
Университет геологических наук PhD
E-mail: o.mardiev@unigeo.uz,
https://orcid.org/0009-0002-6474-4757
Нилуфар Вайитовна Жураева
Университет геологических наук кандидат
E-mail: mina-uzb@mail.ru,
https://orcid.org/0000-0001-6163-0151

Аннотация. В данной работе исследуется задача о существовании и построении 2π-периодического по времени решения для сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа. Методами регуляризации и асимптотического анализа изучается поведение решений при стремлении малого параметра ε к нулю. Установлены условия существования регулярного решения и его аппроксимация при малых ε. Приведены оценки остаточных членов и исследована устойчивость полученных решений.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, гиперболическое уравнение, периодическое решение, регуляризация, асимптотический метод.

Abstract. This paper investigates the existence and asymptotic behavior of 2π-periodic in time solutions to a singularly perturbed hyperbolic-type partial differential equation. The problem is analyzed in the context of small-parameter asymptotics using regularization techniques. The limit problem is identified, and a formal asymptotic expansion of the solution is constructed. Error estimates for the remainder term are derived, and conditions for the stability and uniqueness of the periodic solution are established.

Keywords: singular perturbation, hyperbolic equation, periodic solution, regularization, asymptotic expansion.

Annotatsiya. Ushbu maqolada singular toyilgan giperbolik tipdagi tenglamaning 2π -davriy yechimining mavjudligi va qurilishi muammosi o'rganiladi. Kichik parameter ε nolga intilganda yechimni o'rganish uchun regulyarizatsiya va asimptotik tahlil usullari qo‘llanilgan. Regulyar qisminining yechimni mavjudligi va uning kichik parameter ε uchun yaqinlashuv shartlari aniqlangan. Qoldiq hadi baholanib, olingan yechimlarning barqarorligi tekshirilgan.

ISSN 3030-3907

Kalit so‘zlar: singular perturbatsiya, giperbolik tenglama, davriy yechim, regulizatsiya, asimptotik usul.

ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные задачи механики, физики и инженерных наук сводятся к исследованию краевых задач для уравнений в частных производных. Особый интерес представляют уравнения гиперболического типа, описывающие волновые процессы. Если в таких уравнениях присутствует малый параметр при старшей производной, возникают сингулярные возмущения, что существенно осложняет анализ.

Понятие асимптотического разложения функции и асимптотического ряда были введены Анри Пуанкаре при разрешении задач небесной механики. Отдельные случаи асимптотического разложения были открыты и применялись ещё в XVIII в. Асимптотические разложения и ряды играют важную роль в различных задачах математики, механики и физики. В развитии этого направления значительный вклад внесли А.Н.Тихонов, В.Вазов, А.Б.Васильева, М.И.Иманалиев, С.А.Ломов, В.Ф.Бутузов, К.А.Касымов и др. Усилиями этих ученых и их учеников созданы различные асимптотические методы решения сингулярно возмущенных уравнений.

Теоретической основой метода регуляризации состоит в том, что решение сингулярно возмущенной задачи зависит от возмущения: регулярно и сингулярно.

При решении задач с открытой областью управления используется “метод пограничных функций” или “пограничного слоя”, разработанный А. Б. Васильевой и впоследствии усовершенствованный с учениками В. Ф. Бутузовым, Н. Н. Нефедовым.

Он заключается в непосредственной подстановке в условия задачи асимптотического разложения решения и построения серии задач для нахождения коэффициентов ряда

Термин «пограничный слой» заимствован из гидродинамики. Система, описывающая вязкую жидкость, по отношению к системе, описывающей идеальную жидкость, представляет собой как раз пример сингулярно возмущенной системы. В гидродинамике давно уже было замечено, что уравнения идеальной жидкости даже в случае малой вязкости не пригодны для описания процесса, например, вблизи границы обтекаемого тела. Эту область и назвали в гидродинамике пограничным слоем. С точки зрения математики причина этого явления в гидродинамике состоит опять-таки в том, что решение уравнений идеальной жидкости не может удовлетворить граничным условиям, имеющим место для уравнений вязкой жидкости [1].

ISSN 3030-3907

Цель настоящей работы — построить и исследовать 2π-периодическое по времени решение сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа, используя методы теории возмущений и функционального анализа.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее сингулярно возмущенное уравнение гиперболического типа:

$$\varepsilon u_{tt} + a(x)\, u_t - u_{xx} + q(x)u = f(x,t,u),\ x \in (0,L), t \in R, \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \text{для всех t} \in \text{R}, \quad (2)$$

и условием 2π-периодичности:

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t),\ \forall x \in [0,L]. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon>0$ — малый параметр, $a(x),\ q(x) \in C^1[0,\ l]$ где $q(x) \geq q_0 > 0$,

f — достаточно гладкая нелинейная функция, 2π - периодическая по t.

Регуляризация и предельная задача

При ε→0 уравнение переходит в параболическое:

$$a(x)u_t - u_{xx} + q(x)u = f(x,t,u),$$

Исследуем предельную задачу и установим существование её периодического решения. Предполагается, что соответствующий оператор является нормально разрешимым, а нелинейность удовлетворяет условиям Липшица.

Построение асимптотического разложения

Ищем решение в виде разложения:

$$u(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \cdots$$

Подставляя в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем цепочку задач для $u_0, u_1, \ldots$. Решение основной задачи $u_0(x,\ t)$ удовлетворяет предельному уравнению.

Вырожденная система имеет семейства 2π-периодических решений, а период малой вынуждающей силы также равна 2π. Наличие нелинейности обеспечивает существование решения возмущенной системы, период которого также равен 2π.

Для построения функции пограничного слоя соответственно в окрестностях $x=0$ и $x=\ell$ будем применять стандартную процедуру теории сингулярных возмущений [1,2].

Дополнительные условия для пограничных функций получим из граничных условий (2). Кроме того, из свойства пограничных функции имеем

$$\Pi_k u(\xi,t,\varepsilon) \to 0,\ \xi \to \infty. \text{ где } \xi = \frac{x}{\varepsilon},\ \eta = \frac{(\ell - x)}{\varepsilon}.$$

Оценка остаточного члена

ISSN 3030-3907

Оценивается остаточный член:

$R_N(x,t,\varepsilon)$ и доказывается, что при достаточной гладкости данных:

$$R_N(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(x,t).$$

При предположениях о регулярности данных можно показать, что остаток удовлетворяет условию:

$$||R_N||_{C([0,l]\times[0,2\pi])} \leq C\varepsilon^{N+1},$$

где константа C не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Устойчивость и единственность

Рассматривается линейная вариация уравнения, анализируется спектр соответствующего оператора, и устанавливаются условия устойчивости периодического решения. Используется метод априорных оценок и теоремы о сжимающих отображениях для доказательства единственности.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение:

$$\varepsilon u_{tt} + u_t - u_{xx} + u = sin(t)\, sin(\pi x),$$

с нулевыми граничными условиями и 2π-периодичностью. Решение можно представить в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа, после чего аналитически получить асимптотическое разложение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построено асимптотическое разложение 2π-периодического по времени решения сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа. Показано, что при малом параметре ε решение можно аппроксимировать решением предельной параболической задачи с высокой точностью. Установлены оценки остаточного члена и условия устойчивости 2π-периодического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Вишик М.И. О сингулярных возмущениях в задачах с частными производными. — М.: Наука, 1989.
2. Ладыженская О.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1973.
3. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. — Dover, 2002.
4. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. — World Scientific, 1995.
5. Сайдаматов М.М. Об одном критическом случае в задаче о периодическом решении сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа. Изв. АН УзР сер. Физ-мат. Наук, 19-23, 1986.

ISSN 3030-3907

6. Lions J.L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. — Dunod, Paris, 1969.

ISSN 3030-3907