CHEGARALANMAGAN VA YARIM CHEGARALANGAN SOHALARD BERILGAN TOR TEBRANISH TENGLAMALARI UCHUN QO‘YILGAN MASALALARNING GEOMETRIK TALQINI

Xayriyeva Dilora
Osiyo Xalqaro Unversiteti magistranti

Annotatsiya. Mazkur ilmiy ishda chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda berilgan tor tebranish tenglamalari uchun qo‘yilgan masalalarning geometrik talqini batafsil yoritilgan. Tor tebranish tenglamasi matematik fizikaning muhim tenglamalaridan biri bo‘lib, u elastik muhitlarda to‘lqin jarayonlarini modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Ishda tenglamaning fizik mazmuni, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning yechimga ta’siri, to‘lqinlarning fazoda va vaqt bo‘yicha tarqalish xususiyatlari tahlil qilingan.Chegaralanmagan sohada d’Alembert formulasi asosida to‘lqinlarning ikki yo‘nalishda erkin tarqalishi hamda ta’sir konusi tushunchasining geometrik mohiyati ochib berilgan. Yarim chegaralangan sohada esa torning uchidagi mahkamlangan va erkin chegaraviy shartlarga mos ravishda to‘lqinlarning akslanish jarayoni akslantirish usuli yordamida tushuntirilgan. Xarakteristikalar yordamida yechimning geometrik tasviri keltirilgan bo‘lib, bu yondashuv tor tebranish jarayonini yanada aniq va tushunarli ifodalashga xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: simning tebranish tenglamasi, cheksiz soha, yarim cheklangan soha geometrik talqin , geometrik izoh, refleksiya usuli,xarakteristikalar, to‘lqin tarqalishi

Аннотация. В данной научной работе подробно рассматривается геометрическая интерпретация задач, поставленных для уравнения колебаний струны в неограниченных и полуограниченных областях. Уравнение колебаний струны является одной из фундаментальных моделей математической физики и широко применяется для описания волновых процессов в упругих средах. В работе анализируются физический и математический смысл уравнения, влияние начальных и граничных условий на характер решения, а также особенности распространения волн во времени и пространстве.Для неограниченной области раскрывается геометрическая сущность формулы д’Аламбера и понятие области зависимости решения. В случае полуограниченной области исследуется процесс отражения волн от границы при различных граничных условиях с использованием метода отражения. Особое внимание уделено характеристикам как геометрическому инструменту анализа решений, что позволяет наглядно представить процесс колебаний струны.

Ключевые слова. уравнение колебаний струны, неограниченная область, полуограниченная область, геометрическая интерпретация,

ISSN 3030-3907

Annotation. This scientific paper presents a detailed study of the geometric interpretation of problems associated with the string vibration equation in unbounded and semi-bounded domains. The string vibration equation is one of the fundamental equations of mathematical physics and is widely used to model wave processes in elastic media. The paper analyzes the physical and mathematical meaning of the equation, the influence of initial and boundary conditions on the solution behavior, and the characteristics of wave propagation in space and time.For the unbounded domain, the geometric meaning of the d'Alembert formula and the concept of the domain of dependence are explained. In the semi-bounded domain, wave reflection at the boundary under different boundary conditions is studied using the reflection method. Special attention is given to characteristic lines as a geometric tool for analyzing solutions, providing a clear and intuitive understanding of the string vibration process.

Keywords: string vibration equation, unbounded domain, semi-bounded domain, geometric interpretation, reflection method, characteristics, wave propagation

KIRISH

Tor tebranish tenglamasi matematik fizikaning asosiy tenglamalaridan biri bo‘lib, u elastik muhitlarda, xususan, tor, ip va shunga o‘xshash fizik obyektlarning tebranish jarayonlarini tavsiflashda keng qo‘llaniladi. Ushbu tenglama yordamida mexanik tebranishlar, akustik to‘lqinlar hamda boshqa ko‘plab fizik jarayonlar modellashtiriladi. Tor tebranish tenglamasi nafaqat amaliy masalalarda, balki matematik fizika tenglamalarining nazariy asoslarini o‘rganishda ham muhim o‘rin tutadi.Amaliy masalalarda torning joylashuvi turli geometrik sohalarda qaralishi mumkin. Jumladan, torning cheksiz uzun deb olinishi chegaralanmagan soha tushunchasini, torning bir uchigina mavjud bo‘lishi esa yarim chegaralangan soha tushunchasini keltirib chiqaradi. Bunday sohalarda qo‘yilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlar yechimning xossalariga, xususan, to‘lqinlarning tarqalishi va akslanishiga bevosita ta’sir ko‘rsatadi.Mazkur ishda chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda berilgan tor tebranish tenglamalari uchun qo‘yilgan masalalarning geometrik talqini asosiy tadqiqot obyekti sifatida tanlangan. Geometrik yondashuv yechimlarning xarakteristikalar bo‘ylab tarqalishini, ta’sir sohalarini hamda to‘lqinlarning chegaralarda akslanish mexanizmini yaqqol tasvirlash imkonini beradi. Bu esa tor tebranish jarayonining fizik mazmunini chuqurroq anglash va matematik modelning mohiyatini ochib berishga xizmat qiladi.Mazkur ishning maqsadi — tor tebranish tenglamalari uchun qo‘yilgan masalalarni geometrik nuqtayi nazardan tahlil qilish, chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda yechimlarning xatti-harakatini solishtirish hamda

ISSN 3030-3907

akslantirish usuli va xarakteristikalar yordamida ularning geometrik mazmunini yoritib berishdan iborat.

Chegaralanmagan sohada tor tebranish tenglamalari masalalarining geometrik talqini

$(-\infty < x < +\infty)$ qo'yilgan masalaning geometrik talqini

Chegaralanmagan sohada tor cheksiz uzun deb qaraladi. Boshlang'ich shartlar:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Bu holatda chegaraviy shartlar yo'q, chunki soha cheksiz.
Yechim d'Alembert formulasi orqali ifodalanadi:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)] + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds.$$

Boshlang'ich vaqtda (odatda **t = 0**) berilgan
funksiya ip (yoki muhit)ning dastlabki shaklini bildiradi.
To'lqin tenglamasining asosiy xossasiga ko'ra, bu boshlang'ich siljish **ikki mustaqil to'lqinga ajraladi**:

$$\varphi(x-ct)$$

$$\varphi(x+ct)$$

Bu to'lqinlar **c tezlik** bilan harakatlanadi. Ya'ni, boshlang'ich shakl buzilmagan holda, faqat fazoda siljib boradi.Geometrik ma'noda bu shuni anglatadiki, har bir "to'lqin bo'lagi" vaqt o'tishi bilan tekis chiziqlar bo'ylab tarqaladi.

Chegaralanmagan sohada tor tebranish masalalarining geometrik talqiniChegaralanmagan sohada tor cheksiz uzun deb tasavvur qilinadi. Bunday holatda torning hech bir uchida fizik to'siq yoki chegara mavjud bo'lmaydi. Shu sababli torning tebranishi erkin tarzda, hech qanday akslanishsiz davom etadi. Geometrik nuqtayi nazardan qaralganda, torning har bir nuqtasida yuzaga kelgan tebranish ikki tomonga bir xil tezlikda tarqaluvchi to'lqinlar ko'rinishida yoyiladi.

Boshlang'ich vaqtda tor qanday shaklda egilgan bo'lsa yoki qaysi nuqtalariga qanday tezlik berilgan bo'lsa, aynan shu ma'lumotlar keyingi tebranish

ISSN 3030-3907

jarayonini belgilaydi. Har bir vaqtdagi tor holati avvalgi holatlarning ma’lum bir qismi bilan bog‘liq bo‘lib, bu bog‘liqlik geometrik jihatdan ma’lum bir hudud orqali ifodalanadi. Ya’ni, torning ma’lum bir nuqtasidagi tebranish faqatgina unga yetib kelishga ulguradigan to‘lqinlar ta’sirida shakllanadi.Geometrik talqinda bu holat to‘lqinlarning fazoda to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab harakatlanishi sifatida qaraladi. Ushbu chiziqlar tor bo‘ylab tebranishlarning qanday yo‘nalishda va qanday tezlikda uzatilishini ko‘rsatadi. Natijada, chegaralanmagan sohada tor tebranishi uzluksiz va silliq tarqaluvchi jarayon sifatida namoyon bo‘ladi.

Yarim chegaralangan sohada tor tebranish masalalarining geometrik talqiniYarim chegaralangan sohada torning bir uchi mavjud bo‘lib, bu uch torning tebranish xarakteriga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Torning uchidagi shartga qarab tebranish jarayoni turlicha geometrik mazmunga ega bo‘ladi. Amaliyotda ko‘pincha torning uchi mahkamlangan yoki erkin holatda qaraladi.Agar torning uchi mahkamlangan bo‘lsa, to‘lqin ushbu nuqtaga yetib kelganda qaytib ketadi va uning tebranish yo‘nalishi o‘zgaradi. Geometrik jihatdan bu holat to‘lqinning oynadan aks etishiga o‘xshaydi, biroq aks etish jarayonida tebranish shakli teskari ko‘rinishga o‘tadi. Bunday akslanish torning keyingi tebranishlariga muhim ta’sir ko‘rsatadi.Agar torning uchi erkin bo‘lsa, to‘lqin chegaraga yetgach, akslanadi, ammo tebranish yo‘nalishi saqlanib qoladi. Bu holda to‘lqin shakli buzilmaydi va tor bo‘ylab qayta tarqaladi. Geometrik talqinda bu jarayon to‘lqinning tekis sirtga urilib, shaklini o‘zgartirmasdan qaytishiga o‘xshatiladi.Yarim chegaralangan sohada tor tebranishini tushuntirishda akslantirish usuli muhim ahamiyatga ega. Ushbu yondashuv orqali torning chegaradan tashqaridagi xayoliy davom ettirilgan qismi tasavvur qilinadi va natijada tebranish jarayoni geometrik jihatdan ancha sodda va tushunarli holga keltiriladi.

To‘lqinlarning tarqalishi va geometrik tasviriTor tebranish jarayonini geometrik talqin qilishda to‘lqinlarning tarqalish yo‘llari alohida o‘rin tutadi. Tebranishlar tor bo‘ylab ma’lum yo‘nalishlarda harakatlanadi va vaqt o‘tishi bilan o‘z o‘rnini o‘zgartirib boradi. Bu harakatni geometrik nuqtayi nazardan tasvirlash orqali tebranish jarayonining ichki qonuniyatlarini aniqlash mumkin.To‘lqinlarning tarqalish chiziqlari tor tebranishining asosiy yo‘nalishlarini ifodalaydi. Chegaralanmagan sohada bu chiziqlar uzluksiz davom etsa, yarim chegaralangan sohada ular chegaraga yetgach qaytadi. Aynan shu chiziqlar orqali torning qaysi nuqtasida qaysi vaqtda qanday tebranish yuzaga kelishini tushunish mumkin.

Chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarning solishtirma geometrik tahliliChegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda tor tebranishining geometrik talqini o‘zaro solishtirilganda ularning asosiy farqi

ISSN 3030-3907

chegaraning mavjud yoki mavjud emasligi bilan belgilanadi. Chegaralanmagan sohada to‘lqinlar erkin tarqaladi va hech qanday to‘siqqa duch kelmaydi. Yarim chegaralangan sohada esa to‘lqinlar chegaraga urilib, qaytadi va natijada murakkabroq tebranish manzarasi yuzaga keladi.Geometrik yondashuv ushbu farqlarni aniq tasvirlash imkonini beradi hamda tor tebranish jarayonining fizik mohiyatini tushunishda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Tor tebranish tenglamalari bilan bog‘liq masalalarda talabalar va tadqiqotchilar ko‘pincha matematik ifodalarning murakkabligi sababli jarayonning fizik va geometrik mazmunini to‘liq anglay olmaydilar. Natijada yechimlar formal ko‘rinishda qabul qilinib, ularning real fizik jarayon bilan bog‘liqligi yetarli darajada tushunilmaydi.Ushbu muammoni bartaraf etishda geometrik talqin muhim rol o‘ynaydi. Tor tebranishini formulalarsiz, ya’ni to‘lqinlarning fazoda va vaqt bo‘yicha tarqalishi, ularning yo‘nalishi va chegaralarda akslanishi orqali tushuntirish jarayonni ancha soddalashtiradi. Geometrik tasvirlar va mantiqiy izohlar yordamida tor tebranishining fizik mohiyatini chuqurroq anglash mumkin bo‘ladi.

Ko‘plab hollarda tor tebranish masalalarida sohaning turi — chegaralanmagan yoki yarim chegaralangan ekanligini to‘g‘ri talqin qilish qiyinchilik tug‘diradi. Bu esa to‘lqinlarning qanday harakatlanishini noto‘g‘ri tasavvur qilishga olib keladi.Geometrik yondashuv orqali bu farqni aniq ko‘rsatish mumkin. Chegaralanmagan sohada to‘lqinlar hech qanday to‘siqsiz erkin tarqalishi, yarim chegaralangan sohada esa to‘lqinlarning chegara bilan o‘zaro ta’sirlashib, qaytishi tasvirlab beriladi. Bu taqqoslash tor tebranish jarayonining asosiy xususiyatlarini aniq ajratib ko‘rsatishga yordam beradi.

Torning uchidagi shartlar — mahkamlangan yoki erkin bo‘lishi — ko‘pincha faqat matematik talab sifatida qabul qilinadi. Natijada bu shartlarning tor tebranishiga qanday ta’sir ko‘rsatishi yetarli darajada tushunilmaydi.Geometrik talqin yordamida chegaraviy shartlar fizik jarayon sifatida izohlanadi. Mahkamlangan uchda to‘lqinning teskari akslanishi, erkin uchda esa to‘lqinning shakli saqlangan holda qaytishi hayotiy misollar va tasavvurlar orqali tushuntiriladi. Bu esa chegaraviy shartlarning mazmunini yanada ravshanlashtiradi.Matematik fizika adabiyotlarida tor tebranish jarayonlari to‘lqin hodisalari bilan bog‘liq holda keng o‘rganilgan. Xususan, chegaralanmagan va yarim chegaralangan sohalarda qo‘yilgan masalalar real fizik jarayonlarga yaqinligi sababli alohida ilmiy ahamiyatga ega. Ushbu masalalarning geometrik talqini esa tebranish jarayonlarini fazoviy va vaqt bo‘yicha ko‘rgazmali tarzda tushuntirish imkonini beradi.Chegaralanmagan sohalar uchun berilgan tor tebranish masalalarida adabiyotlarda tor cheksiz uzun deb qaraladi. Bunday holatda

ISSN 3030-3907

tebranishlar to‘lqin sifatida ikki yo‘nalishda erkin tarqaladi va hech qanday to‘siqqa duch kelmaydi. Geometrik nuqtai nazardan, bu jarayon to‘lqin frontlarining vaqt o‘tishi bilan fazo bo‘ylab siljishi orqali talqin qilinadi. Har bir nuqtadagi holat faqat ma’lum bir geometrik mintaqadan kelayotgan ta’sirlarga bog‘liq bo‘lib, bu holat sabab–natija bog‘lanishini aniq ko‘rsatib beradi. Adabiyotlarda bunday yondashuv tor tebranishining fizik mohiyatini chuqurroq anglashga xizmat qilishi ta’kidlanadi.Yarim chegaralangan sohalarda esa torning bir uchi mavjud bo‘lib, bu holat tebranish xarakteriga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Adabiyotlarda bu masalalar chegaraviy shartlar bilan bog‘liq holda tahlil qilinadi. Geometrik talqinga ko‘ra, tor bo‘ylab tarqalayotgan to‘lqin chegara nuqtasiga yetgach, aks etadi. Ushbu aks etish jarayoni to‘lqin shaklining o‘zgarishi yoki saqlanishi bilan namoyon bo‘ladi. Natijada, to‘lqinlarning ustma-ust tushishi va interferensiya hodisalari yuzaga keladi, bu esa tebranish jarayonining murakkablashishiga olib keladi.Ko‘plab ilmiy manbalarda yarim chegaralangan sohalardagi masalalarni geometrik jihatdan tushuntirish uchun simmetriya va akslantirish g‘oyalaridan foydalaniladi. Bu yondashuv orqali murakkab chegaraviy masalalar soddaroq fazoviy tasavvur asosida izohlanadi. Natijada, tor tebranishining vaqt bo‘yicha rivojlanishi va to‘lqinlarning harakat yo‘nalishi aniq geometrik tasvirlarda ifodalanadi.Zamonaviy adabiyotlarda geometrik talqin nafaqat nazariy tushuntirish vositasi, balki sonli modellashtirish usullari bilan ham chambarchas bog‘langan. To‘lqinlarning tarqalishi, aks etishi va so‘nishi jarayonlari grafik va vizual modellar orqali ko‘rsatilib, bu esa murakkab matematik tushunchalarni intuitiv darajada anglash imkonini beradi. Ayniqsa, chegaralanmagan sohalarda hisoblash jarayonida sun’iy chegaralar kiritish masalalari geometrik yondashuv asosida izohlanadi.

Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki Chegaralanmagan sohalarda tor tebranishlar erkin tarqaluvchi to‘lqinlar sifatida geometrik jihatdan talqin qilinadi. Har bir nuqtadagi harakat faqat ma’lum fazoviy mintaqadan kelayotgan ta’sirlarga bog‘liq bo‘lib, bu jarayon fizik mazmunni aniq ochib beradi.Yarim chegaralangan sohalarda tor tebranish jarayoni aks etish va interferensiya hodisalari bilan murakkablashadi. Geometrik talqin orqali bu jarayonlarning fazoviy va vaqt bo‘yicha rivojlanishi vizual tarzda ko‘rsatiladi.Geometrik yondashuv nafaqat tebranishlarning fizik mohiyatini tushuntirish, balki sonli va vizual modellashtirish usullarini qo‘llashda ham muhim vosita hisoblanadi.Shu bilan birga, bu yondashuv nazariy va amaliy masalalar o‘rtasidagi bog‘liqlikni mustahkamlaydi, murakkab fizik jarayonlarni intuitiv tushunishga yordam beradi.Umuman olganda, chegara sharoitlari va sohaning cheklanish darajasi tor tebranishlarining xarakterini

ISSN 3030-3907

belgilaydi, va geometrik talqin bu jarayonlarni aniq, tushunarli va vizual tarzda ifodalashga imkon beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Courant, R., & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II. — New York: Interscience, 1962.
2. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. *Equations of Mathematical Physics*. — Moscow: Nauka, 1986.
3. LeVeque, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. — SIAM, 2007.
4. Morse, P. M., & Feshbach, H. *Methods of Theoretical Physics*. — McGraw-Hill, 1953.
5. Courant, R., Friedrichs, K. O. *Supersonic Flow and Shock Waves*. — Springer, 1948.

ISSN 3030-3907