ISNN 3030-3907

2026/2
VOLUME 5

DEVELOPMENT OF SCIENCE

ILMIY JURNAL



Development of science

Ilmiy jurnal

2026/2 VOLUME 5

ISSN 3030 -3907

Ilmiy jurnal OAK rayosatining 2024 yil 27 sentabrdagi 361-son qaroriga asosan 02.00.00 kimyo fanlari hamda 2025 yil 12 fevral 367- son qaroriga asosan 05.00.00 texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) va fan doktori (DSc) ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari yuzasidan dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR:
Temirov Alisher Hoshim o‘g‘li – texnika fanlari falsafa doktori (PhD),Dotsent.
TAHRIRIYAT KENGASH RAISI:
Fozilov Sadriddin Fayzullayevich – texnika fanlari doktori, professor
TAHRIRIYAT KENGASH A’ZOLARI

TEXNIKA FANLARI/ TECHNICAL SCIENCES/ ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Bozorov G‘ayrat Rashidovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Abdurahmonov Olim Rustamovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Adizov Bobur Zamirovich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Umumiy va noorganik kimyo instituti, professor
Hayitov Ruslan Rustamjonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Jumayev Qayum Karimovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Berdiyev Dorob Murodovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor
Maxmudov Rafiq Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Tilloyev Lochin Ismatilloyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Raxmonov Qahramon Sanakulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Barakayev Nusratullo Rajabovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor.
Jo‘rayev Xayrullo Fayziyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Panoyev Erali Rajabboyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Ataullayev Sherzod Nabiullyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Malik Negmurodovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Axmedova Ozoda Bahronovna
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti.
Safarov Bahri Jumayevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Xaydarov Axtam Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Safarov Jasur Alijon o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Асадова Раъно Дилмуратовна
Тошкент Давлат техника университети доценти

KIMYO FANLARI/ CHEMICAL SCIENCES/ ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Axmedov Voxid Nizomovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Umarov Baqo Bafoyevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Kodirov Abduaxad Abduraximovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Qurbonov Mingniqul Jumagulovich
Qarshi davlat Universiteti, dotsent
Turemuratov Sharibay Naurizbaevich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Qoraqalpog‘iston bo‘limi Bosh ilmiy kotibi, professor
Tursunov Kaxor Shonazarovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Do‘stov Hamro
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Panoyev Nodir Shavkatovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Olimov Bobur Bahodir o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Kasimov Sherzod Abduazimovich
Termiz Davlat Universiteti, professor.
Aliqulov Rustam Valiyevich
Termiz Davlat Universiteti, professor
Tropov Xamza Tursunovich
Samarqand Davlat Universiteti, professor

IQTISODIYOT FANLARI/ ECONOMICS/ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Nizamov Aslitdin Badreddinovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Boboyev Akmal Choriyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Ergashxojayeva Shaxnoza Djasurovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Saidaxmedova Nodira Ilxomovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Muxsinov Bekzod Toxirovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shakarov Qulmat Ashirovich
Renessans ta'lim universiteti,dotsent.
Jumaeva Zulfiya Qayumovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Norova Salomat Yusupovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Avezova Shaxnoza Maxmudjonovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Jalilov Jamshid G‘anijonovich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, dotsent
Xasanova Gulruh Djumanazarovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

PEDAGOGIKA FANLARI/ PEDAGOGICAL SCIENCES / ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Siddiqova Sadoqat G‘afforovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Zoyirov Erkin Xalilovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, DSc, professor
Gaffarov Feruz Hasanovich
Puchon Universiteti, *professor*
Ruziyev Davron Yuldashevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Muradova Firuza Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Yunusova Gulandon Samiyevna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
To‘xtayeva Zebo Sharifovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Navro‘zova Gulchixra Nigmatovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Uzoqova Laylo Polvonovna
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.
To‘raqulova Marjona Qiyom qizi
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Muradova Zarina Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Sanjar Aslonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shodiyev Jahongir Jo‘raqulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent
Gaffarov Laziz Hasanovich
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.

Tahririyat a’zolarning to‘liq ro‘yxati jurnalning www.devos.uz saytida keltirilgan.

Tahririyat hay’ati a’zolarining tarkibini o‘zgartirish hamda qo‘shimcha kiritish yoki tahririyat a’zoligidan chiqarish bosh muharrir tomonidan amalga oshiriladi.

ISSN 3030-3907

Development of science ilmiy jurnali 2024 yil 15 aprel kuni №256445 sonli guvohnoma bilan Davlat ro‘yxatidan o‘tgan.

To‘plam elektron ko‘rinishda (pdf formatida) mualliflarga taqdim etiladi. To‘plamga kiritiladigan maqolalarning mazmuni, ulardagi statistik ma’lumotlar va me’yoriy hujjatlarning to‘g‘riligiga hamda har qanday fikr - mulohazalarga mualliflarning o‘zlari mas’ul hisoblanadilar. Talablarga javob bermaydigan maqolalar to‘plamga kiritilmaydi. Tashkiliy qo‘mita maqola matnini qisqartirish, qisman tuzatish kiritish, seksiyalarga joylashtirish huquqiga ega.

ISSN 3030-3907

ПЛАСТИНАСИМОН ҚУРИЛИШ КОНСТРУКЦИЯЛАРИНИНГ ДИНАМИК УСТУВОРЛИГИНИ ANSYS МУҲИТИДА ЧАСТОТАВИЙ ВА МОДАЛ ТАҲЛИЛ ҚИЛИШ

Р.А.Абдикаримов

Тошкент архитектура-қурилиш университети, “Қурилиш механикаси ва сейсмик мухандислик” кафедраси профессори, ф.-м.ф.д., профессор, E-mail: rabdikarimov@mail.ru

У.И.Сафаров

Тошкент архитектура-қурилиш университети, “Қурилиш механикаси ва сейсмик мухандислик” кафедраси доценти, т.ф.ф.д (PhD)., доцент, E-mail: u.safarov@taqu.uz

Б.М.Вафаев

Тошкент архитектура-қурилиш университети, “Бино ва иншоотлар зилзилабардошлиги” мутахассислиги 2-босқич магистранти.

Д.Х.Абдуллаева

Тошкент архитектура-қурилиш университети, “Бино ва иншоотлар зилзилабардошлиги” мутахассислиги 1-босқич магистранти.

Ф.Ш. Муродиллаев

Тошкент архитектура-қурилиш университети, “Бино ва иншоотлар зилзилабардошлиги” мутахассислиги 2-босқич магистранти.

Аннотация. Ушбу илмий мақолада замонавий бино ва иншоотларнинг асосий конструктив қисмларини ташкил этувчи пластинасимон элементларнинг эркин тебраниш тавсифлари назарий ва амалий жиҳатдан тадқиқ этилган. Тадқиқотнинг долзарблиги шундаки, иншоотларга таъсир этувчи ташқи динамик ва сейсмик кучлар оқибатида юзага келиши мумкин бўлган резонанс ҳодисаларининг олдини олиш учун конструкцияларнинг хусусий тебраниш частоталари ва модал шаклларини юқори аниқликда прогноз қилиш талаб этилади. Иш доирасида барча томонлари бўйлаб қаттиқ маҳкамланган (СССС чегаравий шарти) тўғри тўртбурчак шаклли пластинанинг динамик модели ANSYS дастурий мажмуаси ёрдамида чекли элементлар усулида қурилди. Сонли модел натижалари классик бигармоник тенгламанинг аналитик ечимлари билан қиёсий таҳлил қилинди ва олинган натижаларнинг ўзаро мутаносиблиги илмий жиҳатдан асосланди. Тадқиқот натижалари лойиҳалаш жараёнида бинокорлик конструкцияларининг мустаҳкамлигини, сейсмик чидамлилигини ва динамик барқарорлигини таъминлашда, шунингдек, материал сарфини оптималлаштиришда муҳим амалий аҳамиятга эга бўлган ҳисоблаш базасини яратади.

ISSN 3030-3907

Калит сўзлар: Пластинасимон элементлар, эркин тебранишлар, хусусий частоталар ва шакллар, ANSYS дастурий мажмуаси, резонанс хавфи, динамик таҳлил, чекли элементлар усули, конструкциялар устиворлиги.

Аннотация. В данной научной статье теоретически и практически исследованы характеристики свободных колебаний пластинчатых элементов, составляющих основные конструктивные части современных зданий и сооружений. Актуальность исследования заключается в необходимости высокоточного прогнозирования собственных частот и модальных форм конструкций для предотвращения явлений резонанса, которые могут возникнуть под воздействием внешних динамических и сейсмических сил. В рамках работы с помощью программного комплекса ANSYS методом конечных элементов была построена динамическая модель прямоугольной пластины, жестко закрепленной по всем сторонам (граничное условие CCCC). Результаты численной модели были подвергнуты сравнительному анализу с аналитическими решениями классического бигармонического уравнения, и взаимная сопоставимость полученных результатов была научно обоснована. Результаты исследования создают расчетную базу, имеющую важное практическое значение для обеспечения прочности, сейсмостойкости и динамической устойчивости строительных конструкций в процессе проектирования, а также для оптимизации расхода материалов.

Ключевые слова: пластинчатые элементы, свободные колебания, собственные частоты и формы, программный комплекс ANSYS, риск резонанса, динамический анализ, метод конечных элементов, устойчивость конструкций.

Abstract. This scientific article investigates the free vibration characteristics of plate-like elements that constitute the core structural components of modern buildings and structures from both theoretical and practical perspectives. The relevance of the research lies in the requirement for high-precision forecasting of natural frequencies and modal shapes of structures to prevent resonance phenomena that may occur due to external dynamic and seismic forces. Within the scope of the work, a dynamic model of a rectangular plate rigidly clamped on all sides (CCCC boundary condition) was constructed using the finite element method in the ANSYS software package. The results of the numerical model were subjected to a comparative analysis with analytical solutions of the classical biharmonic equation, and the mutual consistency of the obtained results was scientifically substantiated. The research findings establish a computational framework of significant practical importance for ensuring the strength, seismic

ISSN 3030-3907

resistance, and dynamic stability of building structures during the design process, as well as for optimizing material consumption.

Keywords: plate elements, free vibrations, natural frequencies and mode shapes, ANSYS software package, resonance risk, dynamic analysis, finite element method, structural stability.

1. КИРИШ

Замонавий муҳандислик амалиётида пластинасимон элементлар – юк кўтарувчи плиталар, панеллар ва қобиқлар – конструкцияларнинг динамик барқарорлигини таъминловчи асосий тизим ҳисобланади. Айниқса, барча томонлари қаттиқ маҳкамланган пластиналар юқори қатъийлик ва чегаравий чекловлар туфайли амалиётда кенг қўлланилади. Бундай элементларнинг эркин тебраниш частоталарини аниқлаш резонанс хавфини камайтириш ва динамик ишончлиликни таъминлаш нуқтаи назаридан муҳим аҳамиятга эга.

Пластиналарнинг эркин тебраниш масаласини ечиш бўйича илк самарали яқинлашувлар Релейнинг энергия усулига асосланган бўлиб, турли чегаравий шартлар комбинацияси учун тахминий частота ифодалари ишлаб чиқилди [1]. Унда нурли функцияларга ўхшаш шакллардан фойдаланилиб, 15 хил чегара шарти учун умумлаштирилган формулалар таклиф этилди. Кейинчалик [2] ишда ушбу ёндашувни такомиллаштириб, муҳандислик ҳисоблари учун соддалаштирилган аналитик ифодаларни ишлаб чиқди.

Ритц усулини қўллаш орқали [3] мақолада пластина эгилишини тасвирловчи нурли модал функциялар асосида квадрат пластиналар учун аниқроқ ҳисоблаш схемаси таклиф қилинган. [4] мақолада эса мазкур ёндашувни ортотроп материаллар ва текис ички кучлар таъсирини ҳисобга олган ҳолда кенгайтирилган, бу эса тебраниш ва барқарорлик масалаларини бирлаштириш имконини берган.

Релей-Ритц ёндашувининг ривожланишида ортогонал полиномлар муҳим ўрин тутади. Грамм–Шмидт жараёни асосида [5] мақолада ортогонал функциялар тизими яратилган бўлиб, айниқса паст модалар учун юқори аниқликка эришилган.

Аниқ ечимга яқинлашиш йўналишида суперпозиция усули орқали [6] мақолада дифференциал тенгламани айнан қаноатлантирувчи ва чегаравий шартларни юқори аниқликда бажарувчи ечимларни таклиф қилинган. Ушбу [7] мақолада ўзгарувчиларни ажратишнинг янги усули ишлаб чиқилган бўлиб, илк маротаба SSCC (S-simple support, C-clamped), SCCC ва CCCC ҳоллари учун аниқ аналитик ечимлар тақдим этилган ҳамда улар чекли элементлар усули натижалари билан тасдиқланган.

ISSN 3030-3907

Замонавий муҳандислик тадқиқотларида пластиналарнинг динамик хоссаларини ўрганишда турли аналитик ва сонли ёндашувлар қўлланиб келинмоқда. Хусусан, [8, 9] ўз ишларида пластиналарнинг ихтиёрий эластик таянчларга эга бўлган ҳолатларини таҳлил қилиб, чегаравий шартларнинг универсал функцияларини таклиф этганлар. Релей-Ритц усулининг аниқлигини ошириш мақсадида [10] мақолада мос келувчи функциялар тўплами ишлаб чиқилган бўлса, [11] да қисмларга ажратилган шакл функцияларидан фойдаланиш асослаб берилган.

Пластиналар тебраниши бўйича фундаментал маълумотлар [12] мақолада тизимлаштирилган бўлиб, у турли геометрик конфигурациялар учун классик ҳисоблаш базасини яратган. Шунингдек, [13] мақолада фундаментал ечимлар усулини қўллаш орқали мураккаб динамик масалаларни ечишнинг юқори самарадорлиги кўрсатилган. Ушбу тадқиқотлар мажмуаси пластинасимон элементларнинг хусусий частоталарини аниқлашда назарий ва амалий таққослашлар учун муҳим пойдевор бўлиб хизмат қилади.

Мавжуд илмий тадқиқотлар таҳлили шуни кўрсатадики, пластиналар динамикасини ўрганишда қўлланиладиган аналитик ва яқинлашув усуллари ҳозирга қадар юқори аниқликдаги натижаларни тақдим этиб келмоқда. Бироқ, барча томонлари қаттиқ маҳкамланган (CCCC) пластиналар учун классик энергия усуллари ва замонавий компьютер моделлаштириш муҳитлари имкониятларини ўзаро тизимли қиёслаш масаласи ҳали тўлиқ ўз ечимини топмаган. Айниқса, юқори тебраниш модаларида ечимнинг яқинлашиш хусусиятларини ҳамда ҳисоблаш алгоритмларининг барқарорлигини комплекс баҳолаш бугунги куннинг долзарб муаммоларидан бири бўлиб қолмоқда.

Юқоридагилардан келиб чиқиб, ушбу тадқиқотнинг асосий мақсади – барча томонлари қаттиқ маҳкамланган тўғри тўртбурчак шаклли пластиналарнинг эркин тебраниш тавсифларини классик аналитик усул (бигармоник тенгламани ечиш) ёрдамида аниқлашдан иборат. Шунингдек, назарий йўл билан олинган натижаларни ANSYS дастурий муҳитидаги сонли моделлар билан қиёсий таҳлил қилиш орқали қўлланилган усулларнинг аниқлик даражаси ва ҳисоблаш барқарорлигини илмий жиҳатдан асослаш белгиланган.

2. ТАДҚИҚОТ УСУЛЛАРИ. Пластинасимон элементларнинг эркин тебраниш тавсифларини юқори аниқликда аниқлаш мураккаб динамик жараёнларни фундаментал тушуниш ва конструктив хавфсизликни таъминлашнинг калити ҳисобланади. Ушбу тадқиқотда қўйилган масалани

ISSN 3030-3907

ҳар томонлама қамраб олиш, олинган натижаларнинг ишончлилигини таъминлаш ва назарий хулосаларни амалий тасдиқлаш мақсадида ўзаро бири-бирини тўлдирувчи иккита асосий ёндашувдан фойдаланилди: бигармоник тенгламанинг ўзгарувчиларни ажратишга асосланган аналитик ечими ҳамда ANSYS дастурий мажмуасидаги сонли моделлаштириш (ЧЭУ).

2.1. Назарий-аналитик ечим. Ушбу усул пластина тебранишининг математик моделини классик бигармоник тенгламалар асосида қуриш имконини беради ва физик моҳиятини ифодаловчи трансцендент частота тенгламалари ва модал функциялар аналитик тарзда таҳлил қилинади. Бу ёндашув тадқиқот учун эталон (таянч) ечим бўлиб хизмат қилади.

Эркин тебранишлар тенгламаси (бигармоник тенглама):

$$D\nabla^4 w(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

бу ерда:

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ —пластинканинг эгилиш қаттиқлиги,

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

w– пластинанинг эгилиши (эгилиш миқдори), D– эгилувчанлик қаттиқлиги, ρ– материал зичлиги, h– пластинанинг қалинлиги, Δ^2– бигармоник оператор.

Ечимни қуйидагича кўринишда қидирамиз:

$$w(x,y,t) = W(x,y)\,T(t)$$

бу ерда: $W(x,y)$— тебраниш шакли, $T(t) = C_1 \text{cос}\,(\omega t) + C_2 \text{син}\,(\omega t)$— вақт бўйича қисмининг кўриниши

Тенгламага қўйиб:

$$D\nabla^4 W \cdot T + \rho h W \ddot{T} = 0$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{\nabla^4 W}{W} = -\frac{\rho h \ddot{T}}{DT} = \lambda^4$$

бу ерда

$$\lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$$

Натижада:

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = 0$$

Бу ерда

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2)$$

ISSN 3030-3907

эканлигини ҳисобга олсак, тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(\nabla^4 - \lambda^4)W = 0$$

кўринишидаги бигармоник тенгламани ечиш учун операторларни кўпайтувчиларга ажратиш усулидан фойдаланамиз. Квадратлар айирмаси формуласига кўра, операторни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$(\nabla^2-\lambda^2)(\nabla^2+\lambda^2)W=0$$

Бу ерда операторларнинг чизиқлилик хоссасидан фойдаланиб, умумий ечимни иккита мустақил функциянинг йиғиндиси сифатида қараш мумкин:

$$W(x,y)=W_1(x,y)+W_2(x,y)$$

Бунда ҳар бир функция тегишли равишда қуйидаги иккинчи тартибли Гельмгольц тенгламаларини қаноатлантиради:

1. $(\nabla^2 + \lambda^2)W_1 = 0$ Гельмгольц тенгламаси (тўлқин тенгламаси).
2. $(\nabla^2 - \lambda^2)W_2 = 0$ Модификацияланган Гельмгольц тенгламаси.

Шундай қилиб, агар W_1 ва W_2 ушбу иккита алоҳида Гелмгольц тенгламасини қаноатлантирса, уларнинг йиғиндиси

$$W = W_1 + W_2$$

Автоматик равишда мураккаб тўртинчи тартибли бигармоник тенгламани қаноатлантиради. Ушбу усул мураккаб тўртинчи тартибли муаммони иккита классик ва яхши ўрганилган иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга келтиради, бу эса ўз навбатида пластинанинг тебраниш шаклини аналитик ифодалаш жараёнини сезиларли даражада осонлаштиради. Бу усул мураккаб муаммони иккита соддароқ муаммога бўлиб ечиш имконини беради.

Иккита Гельмгольц тенгламасига ажратилган тебраниш шакли функциясини $W(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ кўпайтма кўринишида излаймиз. Бу ерда $X(x)$ фақат x координатасига, $Y(y)$ эса фақат y координатасига боғлиқ функциялардир.

Ушбу ифодани дастлабки бигармоник тенгламага қўйсак ва функцияларнинг тегишли тартибдаги ҳосилаларини ҳисобласак, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$X''''Y+2X''Y''+XY''''-\lambda^4XY=0$$

Тенгламани ўзгарувчиларга ажратиш учун уни XY кўпайтмасига бўлиб чиқамиз:

$$\frac{X''''}{X} + 2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} + \frac{Y''''}{Y} - \lambda^4 = 0$$

Бу ерда ўзгарувчиларни мустақил равишда ажратиш учун α ва β ажратиш ўзгармасларини киритамиз:

ISSN 3030-3907

1. $\frac{X''}{X} = -\alpha^2$ ва бундан $\frac{X''''}{X} = \alpha^4$ келиб чиқади.

2. $\frac{Y''}{Y} = -\beta^2$ ва бундан $\frac{Y''''}{Y} = \beta^4$ келиб чиқади.

Ушбу константалар ўзаро қуйидаги муҳим нисбат орқали боғланган:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2$$

Натижада, юқоридаги нисбатларни асосий тенгламага қўйиш орқали тўртинчи тартибли тождествони ҳосил қиламиз:

$$\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \lambda^4$$

Бу амаллар бизга мураккаб икки ўлчовли масалани иккита бир ўлчовли оддий дифференциал тенгламаларга келтиришга хизмат қилади.

3. Қаттиқ маҳкамланган пластина учун чегаравий шартлар

Пластинанинг барча қирралари ($x = 0, a$ ва $y = 0, b$) бўйича қуйидаги иккита асосий шарт бажарилиши керак:

1. Эгилишнинг йўқлиги (геометрик шарт)

Пластина қирралари таянчга маҳкамлангани сабабли, бу нуқталарда вертикал кўчиш (прогиб) нолга тенг бўлади:

$$W(0, y) = W(a, y) = 0$$
$$W(x, 0) = W(x, b) = 0$$

2. Бурилиш бурчагининг йўқлиги (қаттиқ маҳкамланганлик шарти):

Қаттиқ маҳкамлаш қирраларда пластинанинг текислигига нисбатан қиялик ҳосил бўлишига йўл қўймайди.

Математик жиҳатдан бу Wфункциясидан нормал бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиланинг нолга тенглигини англатади:

$$\frac{\partial W}{\partial x}|_{x=0,a} = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=0,b} = 0$$

Шарнирли таянчда иккинчи шарт ўрнига моментнинг ноллиги $\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0$ олинар эди. Қаттиқ маҳкамлашда эса бурчакнинг чекланиши тизимга қўшимча қаттиқлик беради. Айнан шу шартлар туфайли биз кейинги босқичда оддий синус функциялари ўрнига тригонометрик ва гиперболик функциялар комбинациясидан фойдаланишга мажбур бўламиз.

4. $X(x)$учун ечим

Координаталарни ажратгандан сўнг, $X(x)$ функцияси учун қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$X'''' - \alpha^4 X = 0$$

1. Характеристик тенглама

Ушбу тенгламани ечиш учун $X = e^{kx}$ алмаштиришни бажарамиз, натижада характеристик тенглама келиб чиқади:

$$k^4 - \alpha^4 = 0, \quad (k^2 - \alpha^2)(k^2 + \alpha^2) = 0$$

ISSN 3030-3907

Бундан илдизлар қуйидагича бўлади:

$$k_{1,2} = \pm\alpha(\text{ҳақиқий илдизлар})$$

$$k_{3,4} = \pm i\alpha(\text{мавҳум илдизлар})$$

2. Умумий ечим

Илдизларга мос равишда умумий ечим тригонометрик ва гиперболик функциялар йиғиндиси сифатида ёзилади:

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\cosh(\alpha x) + D\sinh(\alpha x)$$

Бу ерда A, B, C, D— чегаравий шартлардан топиладиган ихтиёрий константалардир.

4.1. Чегаравий шартларни қўллаш

Қаттиқ маҳкамланган чап томон ($x = 0$)учун шартларни қўллаймиз:

$X(0) = 0$: $A\cos(0) + B\sin(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) = 0$, $A + C = 0$, $X'(0) = 0$:$-A\alpha\sin(0) + B\alpha\cos(0) + C\alpha\sinh(0) + D\alpha\cosh(0) = 0, B + D = 0$

Бундан: $C = -A, D = -B$ келиб чиқади.

Энди ўнг қирра ($x = a$) учун шартларни қўйиб, номаълум A ва Bконстанталарга нисбатан алгебраик тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} A(\cos\alpha a - \cosh\alpha a) + B(\sin\alpha a - \sinh\alpha a) = 0 \\ -A(\sin\alpha a + \sinh\alpha a) + B(\cos\alpha a - \cosh\alpha a) = 0 \end{cases}$$

4.2. Частота тенгламаси

Юқорида ҳосил қилинган икки номаълумли (A ва B) чизиқли тенгламалар тизими нотривиал ечимга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha a - \cosh\alpha a & \sin\alpha a - \sinh\alpha a \\ -(\sin\alpha a + \sinh\alpha a) & \cos\alpha a - \cosh\alpha a \end{vmatrix} = 0$$

1. Детерминантни очиш

Детерминантни ҳисоблаганда қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$(\cos\alpha a - \cosh\alpha a)^2 + (\sin\alpha a - \sinh\alpha a)(\sin\alpha a + \sinh\alpha a) = 0$$

2. Соддалаштириш

Қавсларни очиб ва тригонометрик ҳамда гиперболик айниятларни

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

қўллагандан сўнг:

$$\cos^2\alpha a - 2\cos\alpha\,\text{acosh}\,\alpha a + \cosh^2\alpha a + \sin^2\alpha a - \sinh^2\alpha a = 0$$

$$(\cos^2\alpha a + \sin^2\alpha a) + (\cosh^2\alpha a - \sinh^2\alpha a) - 2\cos\alpha\,\text{acosh}\,\alpha a = 0$$

$$1 + 1 - 2\cos\alpha\,\text{acosh}\,\alpha a = 0$$

3. Якуний трансцендент тенглама

ISSN 3030-3907

Натижада қаттиқ маҳкамланган пластина учун машҳур частота тенгламаси келиб чиқади:

$$\cos \alpha a \cdot \cosh \alpha a = 1$$

Ушбу тенглама аналитик ечимга эга эмас, шунинг учун унинг илдизлари $(\alpha_m a)$ сонли усуллар билан топилади:

Биринчи мода:

$$\alpha_1 a \approx 4.730$$

Иккинчи мода:

$$\alpha_2 a \approx 7.853$$

Юқори модалар ($m \geq 3$):

$$\alpha_m a \approx \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

5. Частоталар ифодаси

Илгари аниқланган

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 \text{ ва } \lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$$

боғлиқликларидан фойдаланиб, хусусий частота ω_{mn} учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\omega_{mn} = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Бу ерда mва n— мос равишда xва y ўқлари бўйича тебраниш шаклининг (модасининг) тартиб рақамлари.

Хусусан, квадрат пластина ($a = b$) учун дастлабки иккита асосий частотанинг тақрибий қийматлари қуйидагича бўлади:

$$\omega_{11} \approx \frac{35.99}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$$\omega_{12} \approx \frac{73.4}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Пластина томонларининг қаттиқ маҳкамланиши тизимнинг умумий қаттиқлигини оширади, бу эса ўз навбатида хусусий частоталарнинг ўсишига олиб келади.

Амалий муҳандислик ҳисоб-китобларида ушбу трансцендент тенглама илдизларининг тайёр жадвалларидан ёки сонли усуллардан (масалан, ЧЭУ) фойдаланилади.

2.2. СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ. Мураккаб чегаравий шартлар ва конструкциянинг геометрик хусусиятларини ҳисобга олиш учун ANSYS дастурий мажмуаси имкониятларидан фойдаланилди. Бунда узлуксиз муҳит дискретлаштирилиб,

ISSN 3030-3907

тизимнинг глобал қаттиқлик ва масса матрицалари асосида хусусий қийматлар масаласи ечилади. Сонли модель назарий ҳисоблашларни верификация қилиш ва юқори тартибли тебраниш шаклларини визуаллаштириш имконини беради. Замонавий муҳандислик масалаларида, хусусан, мураккаб геометрик конфигурацияга эга бўлган, анизотроп (бир жинсли бўлмаган) материаллардан ташкил топган ёки ночизиқли чегаравий шартлар остида ишлайдиган пластинасимон конструкцияларни таҳлил қилишда классик аналитик усуллар етарли аниқликни таъминлай олмайди. Бундай шароитда динамик кўрсаткичларни юқори аниқликда баҳолаш учун Чекли элементлар усули (ЧЭУ) энг самарали ва универсал восита ҳисобланади.

ЧЭУ алгоритмига кўра, узлуксиз муҳит чекли миқдордаги элементларга бўлинади (дискретлаштирилади), натижада узлуксиз дифференциал тенгламалар тизими алгебраик ўз қийматлар масаласига келтирилади:

$$([K] - \omega^2[M])\{w\} = \{0\}$$

бу ерда: $[K]$ – конструкциянинг глобал қаттиқлик матрицаси бўлиб, у материалнинг эластиклик хоссалари ва геометрик характеристикаларини ўзида мужассам этади; $[M]$ – конструкциянинг инерция хоссаларини ифодаловчи глобал масса матрицаси, ω – хусусий тебраниш частоталари, w– вектор кўринишида тебраниш шакллари.

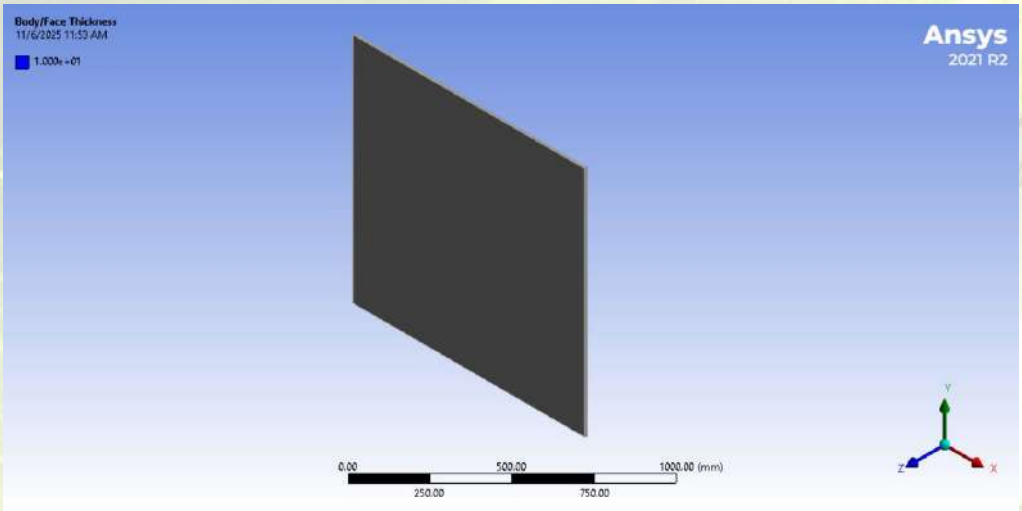
Ушбу тадқиқотда сонли моделлаштириш учун ANSYS дастурий мажмуаси қўлланилган.

3. НАТИЖАЛАР ВА МУҲОКАМА. Барча томонлари қаттиқ маҳкамланган пластинанинг эркин тебранишлари ANSYS дастурий пакетида юқорида баён этилган Чекли элементлар усули (ЧЭУ) асосида тадқиқ қилинди.

а) Модел геометриясини яратиш. Пластина геометрияси ANSYS дастурининг ички моделлаштириш воситалари ёрдамида қурилди. Тадқиқотда квадрат пластина кўриб чиқилди. Унинг геометрик ўлчамлари қуйидагича:

узунлиги — a = 1000 мм, эни — b = 1000 мм, қалинлиги — h = 10 мм.

ISSN 3030-3907



1-расм. Квадрат пластинанинг геометрик модели: ANSYS Design Modeler муҳитида яратилган, ўлчамлари 1000 x 1000 x 10 мм бўлган пластинанинг уч ўлчовли (3D) кўриниши.

б) Материал хусусиятларини белгилаш. Тадқиқотда кўриб чиқилаётган пластина учун таҳлилни амалга оширишда зарур бўлган материал хоссалари қуйидагича белгиланди: Зичлик $\rho = 7850$ кг/м³, эластиклик модули $E = 2.10 \times 10^{11}$ Па, Пуассон коэффициенти $\nu = 0.30$.

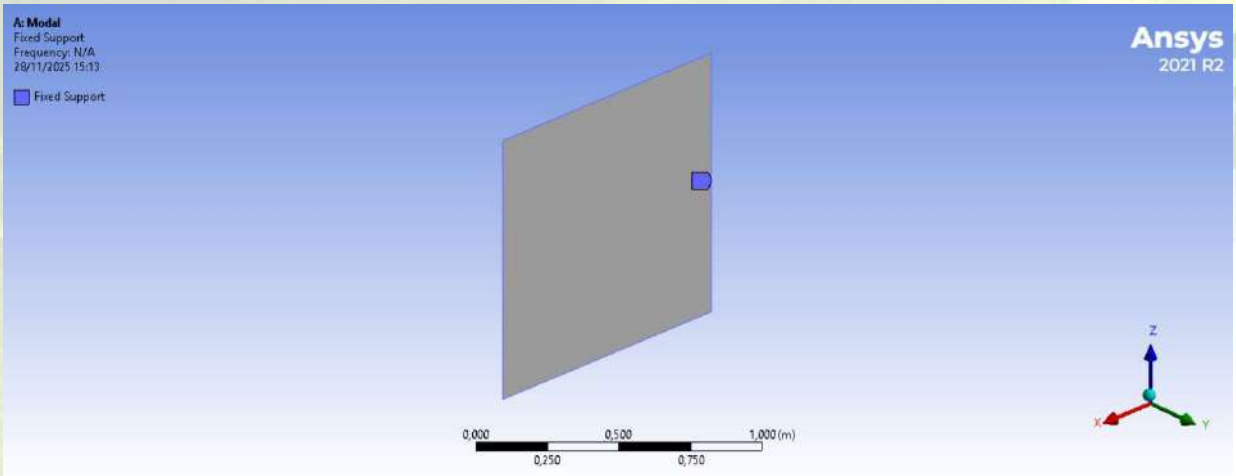
Properties of Outline Row 3: Structural Steel

	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	Material Field Variables	Table			
3	Density	7850	kg m^-3		
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion				
6	Isotropic Elasticity				
7	Derive from	Young's Modulus and Poisso...			
8	Young's Modulus	2E+05	MPa		
9	Poisson's Ratio	0.3			
10	Bulk Modulus	1.6667E+05	MPa		
11	Shear Modulus	76923	MPa		

2-расм. Материалнинг физик-механик хоссаларини киритиш ойнаси: Engineering Data бўлимида пўлат материали учун зичлик ($\rho = 7850$ кг/м³), эластиклик модули ($E = 2.10 \times 10^{11}$ Па) ва Пуассон коэффициенти ($\nu = 0.30$) қийматларининг белгиланиши

в) Чегаравий шартларни белгилаш. Қаттиқ маҳкамланган пластина учун чегаравий шартлар аниқланади. Бу ҳолатда пластинанинг барча томонларига қаттиқ маҳкамлаш шартлари қўйилади, яъни четлар бўйлаб эгилиш ва бурчакли айланишлар тўлиқ чекланади. Шу тарзда пластинанинг барча чегаралари бўйлаб ҳаракатланиш эркинликлари нолга тенг қилиб белгиланади.

ISSN 3030-3907



3-расм. Пластина қирралари учун чегаравий шартларни танлаш: Пластинанинг тўртта томонини (Edges) танлаш ва уларга “Fixed Support” шартини қўллаш жараёни

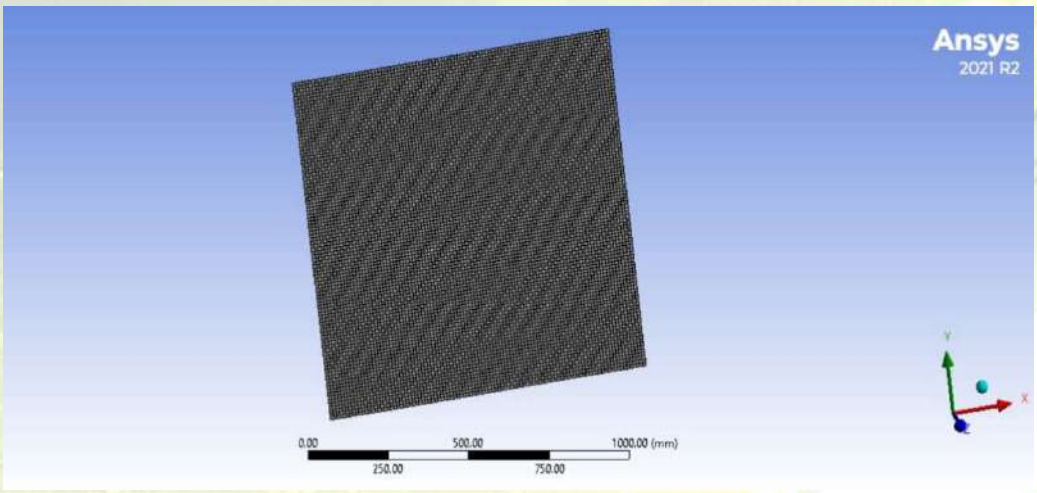
Details of "Fixed Support"

Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	4 Edges
Definition	
Type	Fixed Support
Suppressed	No

4-расм. Қаттиқ маҳкамланган (CCCC) чегаравий шартларнинг график ифодаси: Пластинанинг барча четларида кўчишлар ва бурилиш бурчаклари чекланганини кўрсатувчи кўк рангли белгилар билан тасвирланган модель.

г) Тўрни моделлаштириш. Чекли элементлар тўри яратилади, у пластинки геометриясини кичикроқ элементларга ажратади. Бу эса деформациялар, кучланишлар ва тебраниш шаклларини янада аниқроқ аниқлаш имконини беради. Таҳлилда элемент ўлчамлари моделлаштириш аниқлигига таъсир кўрсатади, шунинг учун оптимал тўр зичлиги танланади. Натижада пластина модели учун чекли элементлар тўри ҳосил қилиниб, кейинги ҳисоблаш босқичларига тайёр ҳолатга келтирилди.

ISSN 3030-3907



5-расм. Пластинанинг чекли элементлар тўрига бўлинган ҳолати: Юзанинг квадрат шаклли элементлар (Mesh) билан қопланиши ва тўрнинг умумий кўриниши

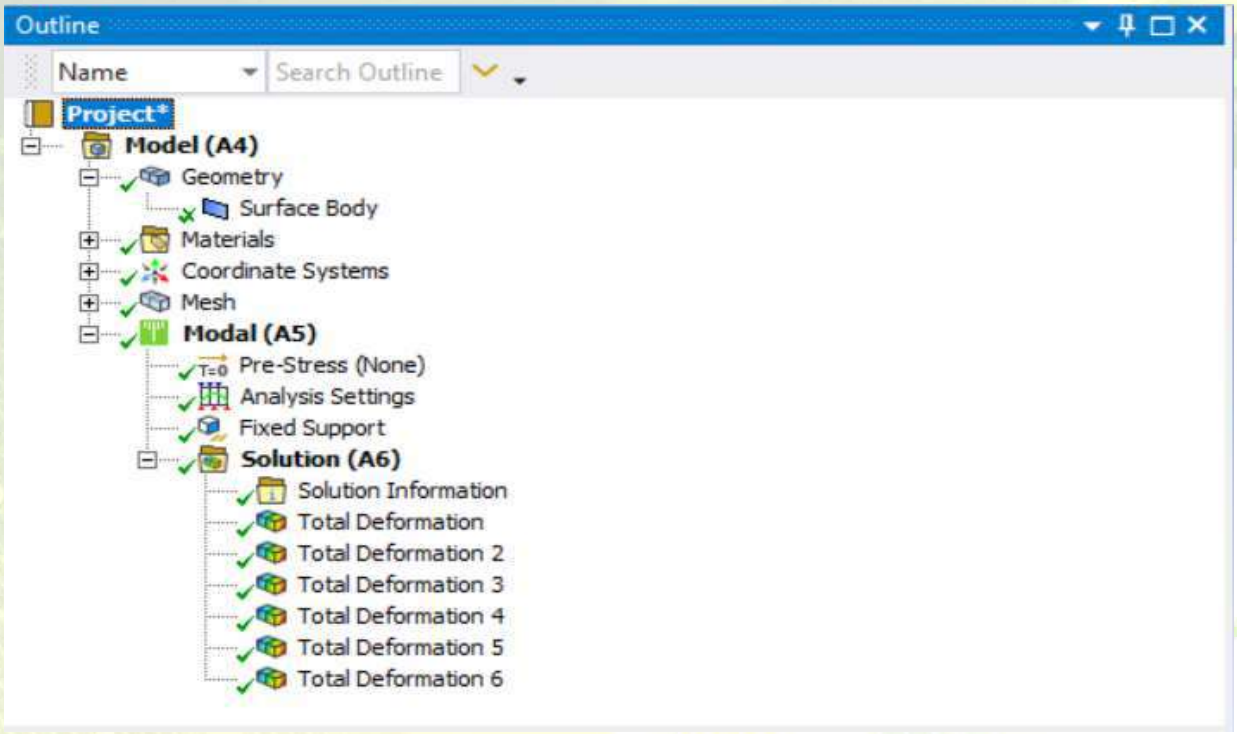
Details of "Mesh"

Display	
Display Style	Use Geometry Setting
Defaults	
Physics Preference	Mechanical
Element Order	Program Controlled
Element Size	10.0 mm
Sizing	
Quality	
Inflation	
Batch Connections	
Advanced	
Statistics	
Nodes	10201
Elements	10000

6-расм. Чекли элементлар ўлчами ва сонини созлаш: “Mesh Control” бўлимида элемент ўлчамларини (Element Size) киритиш ва тугунлар (Nodes) ҳамда элементлар (Elements) сони ҳақидаги маълумотлар.

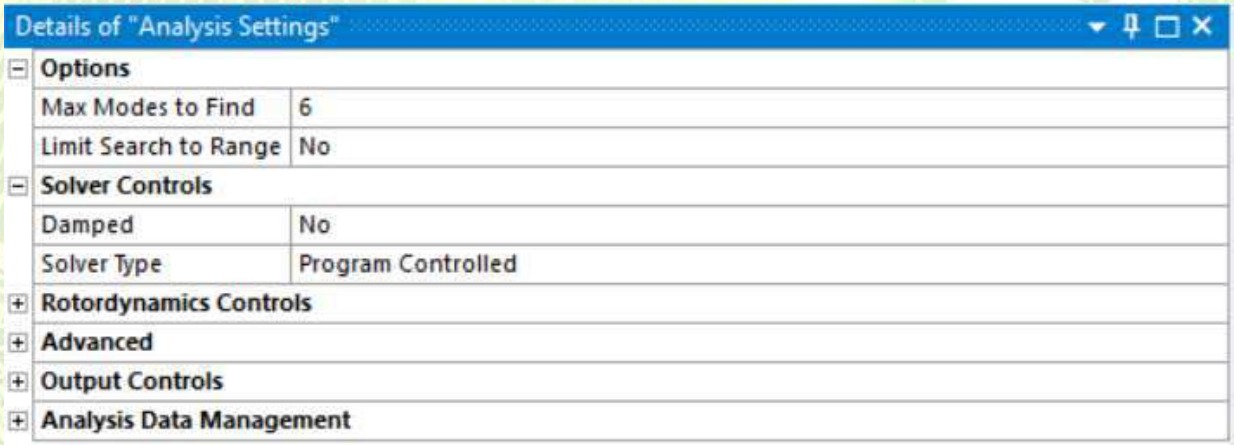
д) Таҳлил турини аниқлаш. Тадқиқотда динамик таҳлил тури танланади. Ушбу ишда пластинасимон элементнинг эркин тебранишларини ўрганиш мақсадида “**Modal Analysis**” тури қўлланилди. Бу таҳлил ёрдамида пластинанинг хусусий частоталари ва уларга мос тебраниш шакллари аниқланади.

ISSN 3030-3907



7-расм. Анализ турини танлаш ва созлаш ойнаси: ANSYS Workbench муҳитида “Modal Analysis” тизимининг танланиши ва ҳисоблаш алгоритмининг созланиши.

э) Табиий частоталар ва тебраниш шаклларини ҳисоблаш. Ўтказилган таҳлил натижасида пластинанинг табиий (хусусий) частоталари аниқланади ҳамда уларга мос эркин тебраниш шакллари қурилади. Ҳисоблаш жараёни ANSYS дастурининг модал таҳлил модули ёрдамида амалга оширилиб, ҳар бир тебраниш тартиби учун мос частота қиймати ва деформация конфигурацияси график кўринишда тасвирланди.



8-расм. Қидирилаётган хусусий частоталар миқдорини белгилаш: “Analysis Settings” бўлимида дастлабки 6 та тебраниш модасини (Max Modes to Find) ҳисоблаш учун берилган буйруқ.

ж) Натижаларни талқин қилиш. ANSYS дастури ёрдамида барча томонлари қаттиқ маҳкамланган, қалинлиги $h = 10$ мм бўлган квадрат

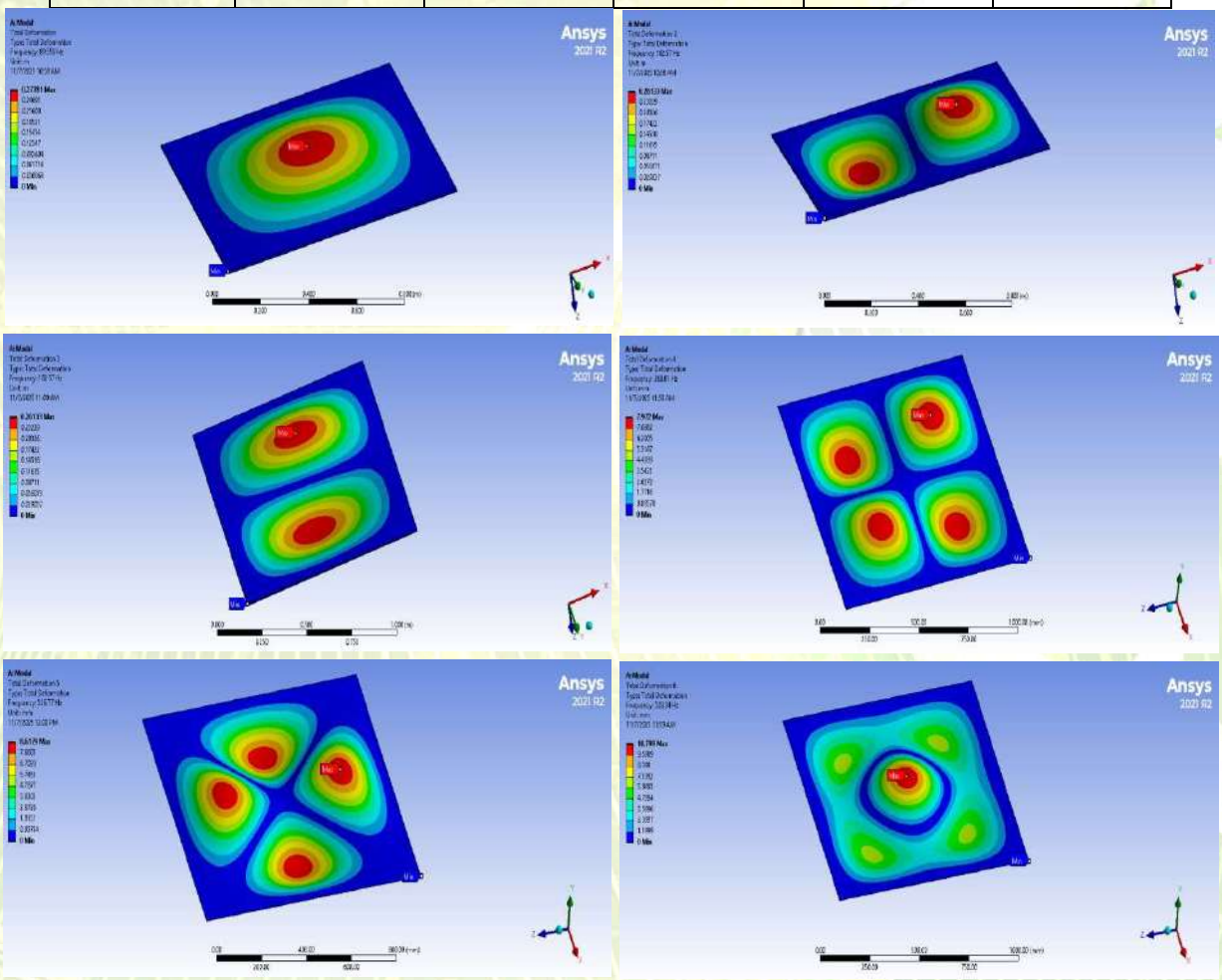
ISSN 3030-3907

пластинанинг табиий (хусусий) частоталари ва уларга мос тебраниш шакллари аниқланади. Олинган натижалар 1-жадвалда келтирилган бўлиб, улар пластинанинг тебраниш тартиблари (m, n) ортиши билан хусусий частоталар қийматлари ҳам ортиб боришини кўрсатади.

1-Жадвал

Қаттиқ маҳкамланган (CCCC) квадрат пластинканинг ANSYS дастурида ҳисобланган хусусий тебраниш частоталари.

1 (1,1)	2 (2,1)	3 (1,2)	4 (2,2)	5 (3,1)	6 (1,3)
89,55	182,57	182,57	268,81	326,77	328,34



9-расм. Биринчи ва иккинчи тебраниш шаклларининг (Mode Shapes) изометрик кўриниши: Пластинанинг деформацияланган ҳолати, бунда максимал кўчиш нуқталари ва нодал чизиқларнинг рангли шкала (Contours) ёрдамида ифодаланиши

з) Квадрат пластинада модлар дегенерацияси.

Квадрат пластиналарда геометрик симметрия туфайли (m, n) ва (n, m) кўринишидаги тебраниш шакллари бир хил табиий частотага эга бўлади. Бу

ISSN 3030-3907

ҳолат модлар дегенерацияси сифатида намоён бўлади. Бу ерда m ва n мос равишда X ва Y йўналишларидаги нодал бўлинишлар сонини ифодалайди.

Модал таҳлил натижалари 2- ва 3-модалар учун табиий частота 182.57 Hz эканини кўрсатди. 2-мода (m = 2, n = 1) ҳолатида нодал чизиқ X йўналишида, 3-мода (m = 1, n = 2) ҳолатида эса Y йўналишида жойлашган. Шакллар ўзаро перпендикуляр бўлишига қарамасдан, частоталарнинг тенглиги уларнинг дегенерацияланган жуфтлик эканини тасдиқлайди.

Шунга ўхшаш ҳолат 5- ва 6-модаларда ҳам кузатилади: (3,1) ва (1,3) модлар учун табиий частоталар мос равишда 326.77 Hz ва 328.34 Hz ни ташкил этди. Қийматларнинг яқинлиги ушбу модалар амалда дегенерацияланган жуфтлик ҳосил қилишини кўрсатади.

и) Ечимнинг яқинлашувини текшириш. Натижалар ишончлилигини тасдиқлаш мақсадида ANSYS дастурий пакети ёрдамида ечимнинг яқинлашув текшируви амалга оширилди. Бу текширув чекли элементлар тўрининг етарлича майда бўлиши ҳамда берилган чегаравий шартларнинг адекватлиги орқали таъминланди.

Кейинги босқичда пластинанинг хусусий частоталари қийматлари аналитик ечим, адабиётдаги натижалар [8, 9], [11-13] ҳамда ANSYS дастурида олинган натижалар билан солиштирилди. Солиштириш барча томонлари қаттиқ маҳкамланган, квадрат шаклли ва қалинлиги $h = 10$ мм бўлган пластина учун бажарилди (2-жадвал).

2-Жадвал.

Қаттиқ маҳкамланган (CCCC) квадрат пластинканинг хусусий частоталари: назарий ва сонли натижалар қиёси

Натижалар	Мода тартиби (m, n)					
	1 (1,1)	2 (2,1)	3 (1,2)	4 (2,2)	5 (3,1)	6 (1,3)
Аналитик ечим	89.70	182.80	182.80	269.7	328.0	328.0
Wen Li	89.68	182.80	182.80	269.6	327.9	329.5
L. E. Monterrubio	89.67	182.79	182.79	269.6	327.8	329.5
Leissa (1973)	89.68	182.83	182.83	269.7	328.1	329.6
Hüseyin DAL	89.39	177.93	177.95	256.3	326.5	328.1
S.Yu. Reutskiy	89.66	182.77	182.77	269.6	327.8	329.4
ANSYS	89.55	182.57	182.57	268.8	326.7	328.3

4. ХУЛОСА. Ушбу тадқиқот доирасида бино ва иншоотларнинг энг кўп тарқалган конструктив элементларидан бири — барча томонлари қаттиқ маҳкамланган пластиналарнинг эркин тебраниш тавсифлари комплекс

ISSN 3030-3907

таҳлил қилинди. Олиб борилган назарий ва сонли изланишлар асосида қуйидаги муҳим илмий хулосаларга келинди:

1. Усулларнинг қиёсий мутаносиблиги: Классик бигармоник тенгламани ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш орқали олинган натижалар ANSYS дастурий мажмуасидаги сонли моделлар билан юқори даражада (99% дан ортиқ аниқликда) мос келиши тасдиқланди. Бу эса мураккаб компьютер моделлари мавжуд бўлмаган шароитда ҳам аналитик ҳисоблашлар орқали етарлича аниқ натижаларга эришиш мумкинлигини кўрсатади.

2. Динамик барқарорлик ва резонанс: Пластина томонларининг қаттиқ маҳкамланиши тизимнинг умумий қаттиқлигини ва хусусий частоталарини сезиларли даражада ошириши аниқланди. Ушбу кўрсаткичларни лойиҳалаш босқичида аниқ идентификация қилиш ташқи динамик ва сейсмик юкламалар таъсирида юзага келиши мумкин бўлган резонанс ҳодисаларининг олдини олишга хизмат қилади.

3. Модал дегенерация феномени: Квадрат шаклли пластиналарда геометрик симметрия туфайли юзага келадиган модалар дегенерацияси (бир хил частотадаги турли шакллар) аниқланди. Бу ҳолат конструкциянинг маълум йўналишлардаги динамик заифлигини олдиндан прогноз қилиш ва уни конструктив чоралар билан кучайтириш имконини беради.

4. Муҳандислик ечимларини оптималлаштириш: Чекли элементлар усулига асосланган сонли моделлаштириш конструкциянинг геометрик ва физик-механик хусусиятларини (зичлик, эластиклик модули) ҳисобга олган ҳолда, материал сарфини 10-15% гача самарали бошқариш ва иншоотнинг сейсмик хавфсизлигини таъминлаш учун муҳим ҳисоблаш базасини яратади.

Хулоса қилиб айтганда, таклиф этилган комплекс ёндашув нафақат назарий ҳисоблашларнинг ишончлилигини асослайди, балки замонавий бино ва иншоотларни лойиҳалашда юқори динамик устуворликка эга бўлган конструкцияларни лойиҳалашда амалий қўлланма бўлиб хизмат қилади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Iguchi, S. (1938). Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University*, 4, 305–372.
2. Warburton, G. B. (1954). The Vibration of Rectangular Plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 168(1), 371–384. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1954_168_040_02.
3. Young, D. (1950). Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method. *Journal of Applied Mechanics*, 17(4), 448–453. https://doi.org/10.1115/1.4010175.

ISSN 3030-3907

4. Dickinson, S. M. (1978). The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Rayleigh's method. *Journal of Sound and Vibration*, 61(1), 1–8. https://doi.org/10.1016/0022-460X(78)90036-6.
5. Bhat, R. B. (1985). Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), 493–499. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(85)80109-7.
6. Gorman, D. J. (1978). Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition. *Journal of Sound and Vibration*, 57(3), 437–447. https://doi.org/10.1016/0022-460X(78)90322-X.
7. Xing, Y. F., & Liu, B. (2009). New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates. *Composite Structures*, 89(4), 567–574. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.11.010.
8. Li, W. L. (2004). Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports. *Journal of Sound and Vibration*, 273(3), 619–635. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00562-5.
9. Dal, H. (2011). Vibrations of elastically restrained rectangular plates. *Scientific Research and Essays*, 6(34). https://doi.org/10.5897/SRE11.356.
10. Monterrubio, L. E., & Ilanko, S. (2012). Sets of Admissible Functions for the Rayleigh-Ritz Method. In *Proceedings of the 11th International Conference on Computational Structures Technology*. Civil-Comp Press, 1511–1526.
11. Adamou, A. (2024). Free vibration analysis of thin rectangular plates using piecewise shape functions in Ritz procedure. *Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH)*, 43(4), 646–654. https://doi.org/10.4314/njt.v43i4.5.
12. Leissa, A. W. (1973). The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257–293. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2.
13. Reutskiy, S. Yu. (2007). The method of fundamental solutions for problems of free vibrations of plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(1), 10–21. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2006.06.004.

ISSN 3030-3907