УДК 519.6:504.064.2.001.18

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩЕЙ ПРИМЕСИ В НЕПОДВИЖНОЙ, НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Шафиев Т.Р.
Бухарский государственный университет
Бакаев И.И.
Бухарский государственный университет
Назаров Ш.Э.
Бухарский государственный университет

Аннотация. В данном работе разработан математическая модель и численный алгоритм процесса диффузии загрязняющей примеси в неподвижной, неограниченной среде, где учтены захват частиц элементами растительности. Для численного интегрирования уравнений модели используются неявные разностные схемы.

Ключевые слова: Математическая модель, растительности, диффузия, закон гидромеханики, аппроксиматsia, концентратsia.

Annotation: In this paper, a mathematical model and numerical algorithm for the diffusion process of a pollutant in a stationary, unlimited medium are developed, where the capture of particles by vegetation elements is taken into account. Implicit difference schemes are used for numerical integration of the model equations.

Keywords: Mathematical model, vegetation, diffusion, law of hydromechanics, approximation, concentration.

Anotatsiya: Ushbu maqolada o’simlik elementlari tomonidan zarrachalarning yutilishi hisobga olinadigan harakatsiz, cheklanmagan muhitda ifloslantiruvchi moddalarning diffuziya jarayonining matematik modeli va sonli algoritmi ishlab chiqilgan. Matematik modelni sonli echish uchun oshkormas sxemadan foydalanilgan.

Kalit so’zlar: Matematik model, o’simliklar, diffuziya, gidromexanika qonuni, approksimasiya, konsentratsiya.

Введение.

Загрязнение воздуха относится к присутствию вредных веществ или загрязняющих веществ в атмосфере Земли на уровнях, которые могут нанести ущерб здоровью человека, окружающей среде и экосистемам. Распространение выбросов в атмосфере - сложный процесс, зависящий от пространства и времени. Силы, управляющие этим процессом, включая факторы управления и принятия решений, и их влияние распределены в пространстве. Это позволяет проводить технический анализ, например, с

ISSN 3030-3907

использованием ГИС или других сложных моделей. Моделирование рассеивания в атмосфере анализирует, как загрязняющие вещества перемещаются в воздухе. Этот метод применяется для оценки концентратsii, направления распространения и, возможно, выявления зон накопления, возникающих в результате промышленной деятельности, транспортного потока, строительства, сельского хозяйства или горнодобывающей промышленности.

Перенос и распространение опасных веществ в атмосфере стали критической проблемой, которую наука анализировала более интенсивно в последние годы. Здоровье человека и окружающая среда вместе с экосистемами сталкиваются с серьезными последствиями этих опасных веществ, которые включают загрязняющие вещества вместе с химикатами и другими опасными материалами. Математические уравнения, известные как сопряженные системы, служат для представления поведения сложных систем при изучении переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере. Уравнения функционируют вместе с уравнениями в частных производных для гидродинамического и транспортного анализа. Ученые разработали математические инструменты, основанные на математических моделях, вместе с численными алгоритмами и программным обеспечением для проведения компьютерных вычислительных экспериментов для изучения состояния окружающей среды промышленных регионов в последние годы.

Исследования широко моделируют перенос аэрозольных частиц через атмосферу, изучая захваты воздушных частиц на растительных компонентах. Моделирование атмосферного потока вместе с переносом частиц на городских улицах подробно обсуждается в статье [1], который включает в свой анализ элементы на основе растений. Результат проведенного моделирования установил, что воздушные частицы испытывают пониженные концентратsii, поскольку они прикрепляются к растительным компонентам.

В исследование [2] авторы рассматривает процесс моделирования рассеивания загрязнения воздуха в своих работе. В статье объясняются многомерные подходы, которые помогают ученым моделировать атмосферное распространение загрязняющих веществ. Методы моделирования позволяют лучше понять источники загрязнения в сочетании с поведением переноса и методами контроля окружающей среды. В статье описываются типы моделирования Гаусса, Эйлера и Лагранжа для

ISSN 3030-3907

прогнозирования измерений загрязняющих веществ и обсуждаются атмосферные условия, а также территориальные особенности рассеивания.

Авторами статьи [3] обсуждается важность и эффективность использования барьеров для снижения загрязнения воздуха вблизи дорог. В статье авторы рассматривают различные типы придорожных барьеров, включая сплошные (например, шумозащитных экранов или стен) и растительность (например, ряды деревьев или кустарников), и исследуют их способность снижать концентратsiю загрязняющих веществ в придорожном воздухе. Методология исследования включает выбор места и установку станций мониторинга для сбора данных о качестве воздуха.

В статье [4] авторы рассматривают поведение концентратsii и потоков скалярных величин (таких как тепло, влага и загрязнения) в области, находящейся за лесными патами. Авторы использовали моделирование на основе крупномасштабной симуляции турбулентности (LES) для исследования этого явления. Они сравнили результаты моделирования с экспериментальными данными, полученными на базе данных Германии.

Исходя из этих соображений, в данной работе рассматривается моделирование процесса переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосфере с учетом захвата частиц элементами растительности. Это позволяет учесть влияние растительности на процессы переноса и диффузии аэрозольных частиц, так как растения могут захватывать частицы из воздуха.

Постановка задачи. Математическая уравнение диффузия вредных веществ в атмосфере имеет следующей вид [5]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+\mu\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right]-\theta(G+\eta)+P; \qquad (1)$$

с соответствующими краевыми условиями:

$$\theta\big|_{t=0}=\theta^0; \qquad (2)$$

$$-\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\xi\left(\theta_E-\theta\right); \qquad \mu\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=L_x}=\xi\left(\theta_E-\theta\right); \qquad (3)$$

$$-\mu\frac{\partial\theta}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\xi\left(\theta_E-\theta\right); \qquad \mu\frac{\partial\theta}{\partial y}\bigg|_{y=L_y}=\xi\left(\theta_E-\theta\right); \qquad (4)$$

$$-\kappa\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\left(\beta\theta-f_0\right); \qquad \kappa\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H_z}=\xi\left(\theta_E-\theta\right). \qquad (5)$$

ISSN 3030-3907

Методы решения задачи. Для решения поставленной задачи разработан численный алгоритм. Для облегчения вычисления, рассмотрим задачи (1)-(5) в прямоугольной области $D=\left(0\le x\le L_x, 0\le y\le L_y, 0\le z\le H_z\right)$, а источник загрязнения будем счиатать расположенным на поверхности земли. Тогда, для численного решения задачи (1)-(5) область изменения искомой переменной с учетом граничных условий покроем сеточной областью [6-8].

Для обеспечения аппроксиматsiи высокого порядка по времени и пространственным переменным, а также устойчивости процесса вычисления используем неявную конечно-разностную схему для уравнения (1) по направлению *Ox*:

$$\frac{1}{2}\frac{\theta_{i,j,k}^{n+1/3}-\theta_{i,j,k}^{n}}{\Delta\tau/3}+\frac{1}{2}\frac{\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3}-\theta_{i+1,j,k}^{n}}{\Delta\tau/3}+\sigma\theta_{i,j,k}^{n+1/3}+\eta\theta_{i,j,k}^{n+1/3}=$$

$$=\frac{\mu}{\Delta x^2}\left(\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3}-2\theta_{i,j,k}^{n+1/3}+\theta_{i-1,j,k}^{n+1/3}\right)+\frac{\mu}{\Delta y^2}\left(\theta_{i,j+1,k}^{n}-2\theta_{i,j,k}^{n}+\theta_{i,j-1,k}^{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta z^2}\left(\kappa_{k+0,5}\theta_{i,j,k+1}^{n}-\left(\kappa_{k+0,5}+\kappa_{k-0,5}\right)\theta_{i,j,k}^{n}+\kappa_{k-0,5}\theta_{i,j,k-1}^{n}\right)+\frac{1}{3}P(x,y,z).$$

Отрываем скобки и, группируя подобные члены уравнения, получаем:

$$a_{i,j,k}\theta_{i-1,j,k}^{n+1/3}-b_{i,j,k}\theta_{i,j,k}^{n+1/3}+c_{i,j,k}\theta_{i+1,j,k}^{n+1/3}=-d_{i,j,k}.$$

где:

$$a_{i,j,j}=\frac{\mu}{\Delta x^2};\quad b_{i,j,j}=\frac{2\mu}{\Delta x^2}+\frac{3}{2\Delta\tau}+\sigma+\eta;\quad c_{i,j,j}=\frac{\mu}{\Delta x^2}-\frac{3}{2\Delta\tau};$$

$$d_{i,j,j}=\left(\frac{3}{2\Delta\tau}-\frac{2\mu}{\Delta y^2}-\frac{\kappa_{k+0,5}+\kappa_{k-0,5}}{\Delta z^2}\right)\theta_{i,j,k}^{n}+\frac{3}{2\Delta\tau}\theta_{i+1,j,k}^{n}+$$

$$+\frac{\mu}{\Delta y^2}\theta_{i,j-1,k}^{n}+\frac{\mu}{\Delta y^2}\theta_{i,j+1,k}^{n}+\frac{\kappa_{k-0,5}}{\Delta z^2}\theta_{i,j,k-1}^{n}+\frac{\kappa_{k+0,5}}{\Delta z^2}\theta_{i,j,k+1}^{n}+\frac{1}{3}P(x,y,z).$$

В граничном условии (3) используем аппроксиматsiю второго порядка точности и имеем

$$-\mu\frac{-3\theta_{0,j,k}^{n+1/3}+4\theta_{1,j,k}^{n+1/3}-\theta_{2,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x}=\xi\theta_E-\xi\theta_{0,j,k}^{n+1/3}$$

или

$$3\mu\theta_{0,j,k}^{n+1/3}-4\mu\theta_{1,j,k}^{n+1/3}+\mu\theta_{2,j,k}^{n+1/3}=2\Delta x\xi\theta_E-2\Delta\,\mathrm{x}\,\xi\theta_{0,j,k}^{n+1/3}. \qquad (6)$$

Из полученной трёхдиагональной системы линейных алгебраических уравнений

ISSN 3030-3907

$$a_{1,j,k}\theta_{0,j,k}^{n+1/3} - b_{1,j,k}\theta_{1,j,k}^{n+1/3} + c_{1,j,k}\theta_{2,j,k}^{n+1/3} = -d_{1,j,k}$$

находим $\theta_{2,j,k}^{n+1/3}$ следующим образом:

$$\theta_{2,j,k}^{n+1/3} = -\frac{a_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}\theta_{0,j,k}^{n+1/3} + \frac{b_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}\theta_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{d_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}. \quad (7)$$

Уравнение (7) подставляем вместо $\theta_{2,j,k}^{n+1/3}$ в (6) и находим $\theta_{0,j,k}^{n+1/3}$ в следующем виде:

$$3\mu\theta_{0,j,k}^{n+1/3} - 4\mu\theta_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{a_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}\mu\theta_{0,j,k}^{n+1/3} + \frac{b_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}\mu\theta_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{d_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}\mu =$$

$$= 2\Delta x\xi\theta_E - 2\Delta\,\mathrm{x}\,\xi\theta_{0,j,k}^{n+1/3};$$

$$\theta_{0,j,k}^{n+1/3} = \frac{4\mu c_{1,j,k} - b_{1,j,k}\mu}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k}\mu + 2\Delta x\xi}\theta_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{d_{1,j,k} + 2\Delta x\xi c_{1,j,k}\theta_E}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k}\mu + 2\Delta x\xi}. \quad (8)$$

Используя приведённые формулы (8), находим значения прогоночных коэффициентов $\alpha_{0,j,k}$ и $\beta_{0,j,k}$:

$$\alpha_{0,j,k} = \frac{4\mu c_{1,j,k} - b_{1,j,k}\mu}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k}\mu + 2\Delta x\xi};\ \beta_{0,j,k} = \frac{d_{1,j,k} + 2\Delta x\xi c_{1,j,k}e_1\theta_E}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k}\mu + 2\Delta x\xi}. \quad (9)$$

Используя проведенные выше действия в граничном условии (3), получаем

$$\mu\frac{\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3\theta_{N,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \xi\theta_E - \xi\theta_{N,j,k}^{n+1/3}$$

или

$$\mu\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\mu\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3\mu\theta_{N,j,k}^{n+1/3} = 2\Delta x\xi\theta_E - 2\Delta\,\mathrm{x}\,\xi\theta_{N,j,k}^{n+1/3}. \quad (10)$$

Последовательно применяя метод прогонки для *N-1* и *N-2*, находим $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$:

$$\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{N-1,j,k}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-1,j,k}; \quad (11)$$

$$\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{N-2,j,k}\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-2,j,k} =$$

$$= \alpha_{N-2,j,k}\left(\alpha_{N-1,j,k}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-1,j,k}\right) + \beta_{N-2,j,k} = \quad (12)$$

$$= \alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}\theta_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k} + \beta_{N-2,j,k}.$$

Подставляя $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$ в (11), (12) вместо $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$, в (10) находим $\theta_{N,j,k}^{n+1/3}$:

ISSN 3030-3907

$$\alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}\mu\theta_{N,j,k}^{n+1/3}+\alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k}\mu+\beta_{N-2,j,k}\mu-4\alpha_{N-1,j,k}\mu\theta_{N,j,k}^{n+1/3}-$$

$$-4\beta_{N-1,j,k}\mu+3\mu\theta_{N,j,k}^{n+1/3}=2\Delta x\,\xi\theta_E-2\Delta x\,\xi\theta_{N,j,k}^{n+1/3};$$

$$\theta_{N,j,k}^{n+1/3}=\frac{2\Delta x\xi\theta_E-\left(\beta_{N-2,j,k}+\alpha_{N-2,j,k}\beta_{N-1,j,k}-4\beta_{N-1,j,k}\right)\mu}{2\Delta x\xi+\left(\alpha_{N-2,j,k}\alpha_{N-1,j,k}-4\alpha_{N-1,j,k}+3\right)\mu}. \qquad (13)$$

При обратном ходе прогонки в последовательно убывающем порядке индекса *i* определяются значения концентратsiй $\theta_{N-1,j,k}^{n+1/3}$, $\theta_{N-2,j,k}^{n+1/3}$, ..., $\theta_{0,j,k}^{n+1/3}$.

Аналогично, для уравнения (1) по направление *Oy* и *Oz* получим конечно-разностное соотношение [9].

Результате: Из рисунков 1-2 видно, что скорость ветра влияет на транспортировку загрязняющих веществ от места выброса, при этом с возрастанием скорости ветра падение концентратsii загрязняющих веществ по времени приобретает характер близкий к линейному.

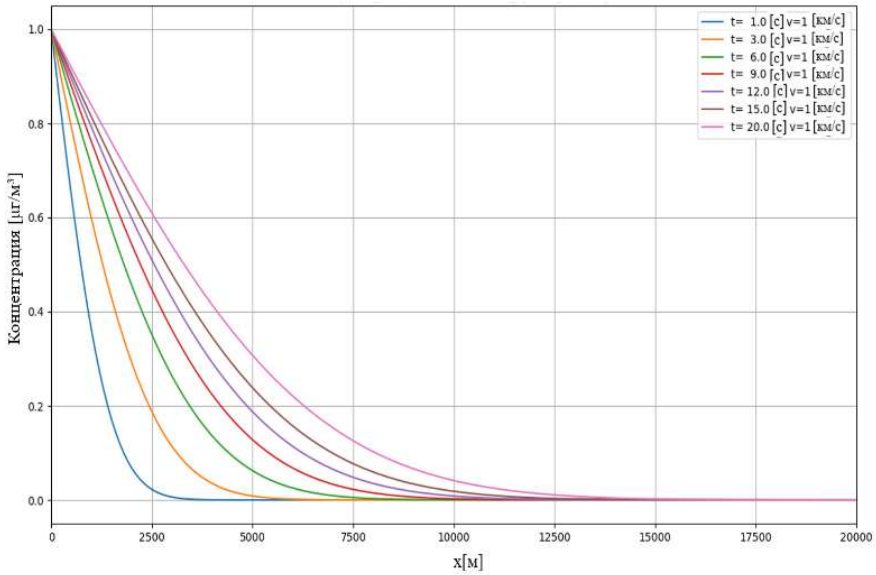


Рис. 1. Изменение концентратsii CO2 (мг/м^3) в атмосферном воздухе по времени t вдоль оси шлейфа с подветренной стороны на высоте h =40 м при скорости ветра ν =1 м/с, мощности источника (90 метровый участок автодороги с низким трафиком) Q =900 мг/м^3 и коэффициенте диффузии $\mu = 0,1$. $\mu = 0,3$.

ISSN 3030-3907

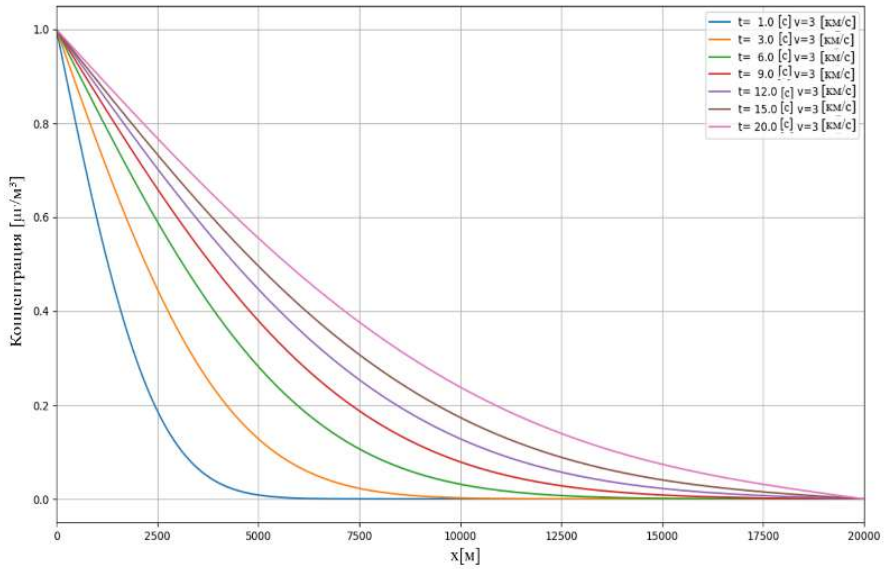


Рис. 2. Изменение концентратsiи CO_2 (мг/м^3) в атмосфере по времени при ν=3 м/с остальные входные данные как на рисунке 1.

Более высокая скорость ветра приводит к более быстрому перемещению загрязнений в окружающей среде, что несколько выравнивает распределение загрязнений, уменьшая вероятность образования зон устойчивой повышенной концентратsiи.

Выводы. И в итоге получены математическая модель и численный алгоритм для исследования, прогнозирования и принятия управленческого решения по защите окружающей среды и воздущных бассейнов промыщленных регионов где учитываются захват частиц элементами растительности, который играет существенный рол в динамику процесса.

Для интегрирование поставленной задачи разработана неявная численная схема и алгоритм со высокого порядка по времени и пространственным переменным с помощью, которой можно проводить численные расчеты на вычислительной системе.

Библиографический список:

1. Zheng T. et al. Impacts of vegetation on particle concentrations in roadside environments //Environmental Pollution. – 2021. – Т. 282. – С. 117067.
2. Ionescu G. L., Ionescu G. C. Atmospheric Pollutant Dispersion Modeling Methods //Journal of Applied Engineering Sciences. – 2023. – Т. 13. – №. 2.
3. Ghasemian M., Amini S., Princevac M. The influence of roadside solid and vegetation barriers on near-road air quality //Atmospheric Environment. – 2017. – Т. 170. – С. 108-117.

ISSN 3030-3907

4. Kanani-Sühring F., Raasch S. Enhanced scalar concentrations and fluxes in the lee of forest patches: a large-eddy simulation study //Boundary-Layer Meteorology. – 2017. – Т. 164. – С. 1-17.
5. Мурадов Ф. А., Назаров Ш. Э., Насруллаев П. Сопряженные уравнения переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосфере с учетом захвата частиц элементами растительности //Экологические чтения-2023. – 2023. – С. 351-357.
6. Равшанов Н., Шафиев Т.Р., Назаров Ш.Э., Боборахимов Б.И. Математическая модель процесс переноса и диффузия загрязняющих вредных веществ в атмосфере с учетом захвата аэрозольных частиц элементами растительности // Проблемы машиноведения. – 2023. – С. 97-101.
7. Shafiev T., Nazarov Sh. Studies of the influence of vegetation cover on the process of transfer and diffusion of harmful substances in the atmosphere //E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2023. – Т. 431. – С. 01059. P.1-11 https://doi.org/10.1051/e3sconf/202343101059.
8. Ravshanov N., Nazarov S. E., Boborakhimov B. Modeling the Process of Pollutant Spread in the Atmosphere with Account for the Capture of Particles by Vegetation Elements //Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Т. 45. – №. 3. – С. 1213-1226.
9. Назаров Ш. Э. Модели, вычислительные алгоритмы и информatsионные системы для мониторинга и прогнозирования экологического состояния
промышленных территорий// Диссертatsiя. – 2023. – С. 63.

ISSN 3030-3907