ISNN 3030-3907

2026
MAY
ISSUE - 5
VOLUME - 6

DEVELOPMENT OF SCIENCE

scientific journal



Development of science

Ilmiy jurnal

MAY 2026
Issue - 5, VOLUME – 6

ISSN 3030 -3907

Ilmiy jurnal OAK rayosatining 2024 yil 27 sentabrdagi 361-son qaroriga asosan 02.00.00 kimyo fanlari hamda 2025 yil 12 fevral 367- son qaroriga asosan 05.00.00 texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) va fan doktori (DSc) ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari yuzasidan dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR:
Temirov Alisher Hoshim o‘g‘li – texnika fanlari falsafa doktori (PhD),Dotsent.
TAHRIRIYAT KENGASH RAISI:
Fozilov Sadriddin Fayzullayevich – texnika fanlari doktori, professor
TAHRIRIYAT KENGASH A’ZOLARI

TEXNIKA FANLARI/ TECHNICAL SCIENCES/ ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Bozorov G‘ayrat Rashidovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Abdurahmonov Olim Rustamovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Adizov Bobur Zamirovich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Umumiy va noorganik kimyo instituti, professor
Hayitov Ruslan Rustamjonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Jumayev Qayum Karimovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Berdiyev Dorob Murodovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor
Maxmudov Rafiq Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Tilloyev Lochin Ismatilloyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Raxmonov Qahramon Sanakulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Barakayev Nusratullo Rajabovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor.
Jo‘rayev Xayrullo Fayziyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Panoyev Erali Rajabboyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Ataullayev Sherzod Nabiullyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Malik Negmurodovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Axmedova Ozoda Bahronovna
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti.
Safarov Bahri Jumayevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Xaydarov Axtam Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Safarov Jasur Alijon o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

KIMYO FANLARI/ CHEMICAL SCIENCES/ ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Axmedov Voxid Nizomovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Umarov Baqo Bafoyevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Kodirov Abduaxad Abduraximovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Qurbonov Mingniqul Jumagulovich
Qarshi davlat Universiteti, dotsent
Turemuratov Sharibay Naurizbaevich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Qoraqalpog‘iston bo‘limi Bosh ilmiy kotibi, professor
Tursunov Kaxor Shonazarovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Do‘stov Hamro
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Panoyev Nodir Shavkatovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Olimov Bobur Bahodir o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Kasimov Sherzod Abduazimovich
Termiz Davlat Universiteti, professor.
Aliqulov Rustam Valiyevich
Termiz Davlat Universiteti, professor
Tropov Xamza Tursunovich
Samarqand Davlat Universiteti, professor

IQTISODIYOT FANLARI/ ECONOMICS/ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Nizamov Aslitdin Badreddinovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Boboyev Akmal Choriyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Ergashxojayeva Shaxnoza Djasurovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Saidaxmedova Nodira Ilxomovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Muxsinov Bekzod Toxirovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shakarov Qulmat Ashirovich
Renessans ta'lim universiteti,dotsent.
Jumaeva Zulfiya Qayumovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Norova Salomat Yusupovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Avezova Shaxnoza Maxmudjonovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Jalilov Jamshid G‘anijonovich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, dotsent
Xasanova Gulruh Djumanazarovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

PEDAGOGIKA FANLARI/ PEDAGOGICAL SCIENCES / ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Siddiqova Sadoqat G‘afforovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Zoyirov Erkin Xalilovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, DSc, professor
Gaffarov Feruz Hasanovich
Puchon Universiteti, *professor*
Ruziyev Davron Yuldashevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Muradova Firuza Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Yunusova Gulandon Samiyevna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
To‘xtayeva Zebo Sharifovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Navro‘zova Gulchixra Nigmatovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Uzoqova Laylo Polvonovna
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.
To‘raqulova Marjona Qiyom qizi
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Muradova Zarina Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Sanjar Aslonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shodiyev Jahongir Jo‘raqulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent
Gaffarov Laziz Hasanovich
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.

Tahririyat a’zolarning to‘liq ro‘yxati jurnalning www.devos.uz saytida keltirilgan.

Tahririyat hay’ati a’zolarining tarkibini o‘zgartirish hamda qo‘shimcha kiritish yoki tahririyat a’zoligidan chiqarish bosh muharrir tomonidan amalga oshiriladi.

ISSN 3030-3907

Development of science ilmiy jurnali 2024 yil 15 aprel kuni №256445 sonli guvohnoma bilan Davlat ro‘yxatidan o‘tgan.

To‘plam elektron ko‘rinishda (pdf formatida) mualliflarga taqdim etiladi. To‘plamga kiritiladigan maqolalarning mazmuni, ulardagi statistik ma’lumotlar va me’yoriy hujjatlarning to‘g‘riligiga hamda har qanday fikr - mulohazalarga mualliflarning o‘zlari mas’ul hisoblanadilar. Talablarga javob bermaydigan maqolalar to‘plamga kiritilmaydi. Tashkiliy qo‘mita maqola matnini qisqartirish, qisman tuzatish kiritish, seksiyalarga joylashtirish huquqiga ega.

ISSN 3030-3907

GIBRID TIZIMLAR UCHUN SONLI INTEGRATSIYA USULLARINI TANLASH VA ULARNING HISOBLASH SAMARADORLIGINI BAHOLASH

Tojiboyev Ibroximjon Tojaliyevich
Farg‘ona Davlat Universiteti
Usmonova Mushtariy Elyorjon qizi
Farg‘ona Davlat Universiteti

Annotatsiya. Ushbu maqolada gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini tanlash va ularning hisoblash samaradorligini baholash masalasi yoritiladi. Gibrid tizimlarda uzluksiz jarayonlar bilan birga diskret o‘tishlar ham mavjud bo‘lgani sababli, klassik sonli usullar har doim ham yetarli aniqlik va barqarorlikni ta’minlay olmaydi. Maqolada Runge–Kutta, Adams, LSODA hamda oshkora va yashirin integratsiya usullarining gibrid modellarni yechishdagi imkoniyatlari tahlil qilinadi. Hisoblash samaradorligi aniqlik, barqarorlik, qadam tanlash, vaqt sarfi va xatolikni nazorat qilish mezonlari asosida baholanadi. Tadqiqot natijalari gibrid differensial tenglamalar modellarini sonli yechishda mos usulni tanlash bo‘yicha ilmiy-amaliy tavsiyalar ishlab chiqishga xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: Gibrid tizim, sonli integratsiya, differensial tenglama, Runge–Kutta usuli, Adams usuli, LSODA, hisoblash samaradorligi, aniqlik, barqarorlik, modellashtirish.

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос выбора методов численного интегрирования для гибридных систем и оценки их вычислительной эффективности. Поскольку в гибридных системах наряду с непрерывными процессами присутствуют дискретные переходы, классические численные методы не всегда обеспечивают достаточную точность и устойчивость. В статье анализируются возможности методов Рунге–Кутты, Адамса, LSODA, а также явных и неявных методов интегрирования при решении гибридных моделей. Вычислительная эффективность оценивается по таким критериям, как точность, устойчивость, выбор шага, затраты времени и контроль погрешности. Полученные результаты служат основой для разработки научно-практических рекомендаций по выбору подходящего метода при численном решении гибридных моделей дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Гибридная система, численное интегрирование, дифференциальное уравнение, метод Рунге–Кутты, метод Адамса, LSODA, вычислительная эффективность, точность, устойчивость, моделирование.

Abstract. This article discusses the selection of numerical integration methods for hybrid systems and the assessment of their computational efficiency. Since hybrid systems combine continuous processes with discrete transitions, classical

numerical methods do not always provide sufficient accuracy and stability. The article analyzes the applicability of Runge–Kutta, Adams, LSODA, explicit and implicit integration methods in solving hybrid models. Computational efficiency is evaluated according to accuracy, stability, step-size selection, time consumption, and error control. The results of the study provide a basis for developing scientific and practical recommendations for selecting an appropriate method in the numerical solution of hybrid differential equation models.

Keywords: hybrid system, numerical integration, differential equation, Runge–Kutta method, Adams method, LSODA, computational efficiency, accuracy, stability, modeling.

KIRISH.

Zamonaviy texnik va axborot tizimlarida uchraydigan ko‘plab jarayonlar faqat uzluksiz harakatdan iborat emas. Ayrim holatlarda tizim ma’lum vaqt oralig‘ida differensial tenglama asosida rivojlanadi, muayyan shart bajarilganda esa uning holati, boshlang‘ich shartlari yoki boshqaruv rejimi diskret tarzda o‘zgaradi. Bunday jarayonlar gibrid tizimlar sifatida qaraladi. Gibrid tizimlar nazariyasi uzluksiz dinamikani differensial tenglamalar orqali, diskret o‘tishlarni esa mantiqiy shartlar va holat almashinuvi yordamida yagona model doirasida ifodalash imkonini beradi [1]. Gibrid tizimlarni sonli yechishda integratsiya usulini tanlash muhim ahamiyatga ega. Oddiy differensial tenglamalarda tanlangan usul asosan aniqlik va hisoblash tezligiga ta’sir qilsa, gibrid tizimlarda u o‘tish nuqtalarini aniqlash, yangi boshlang‘ich shartlarni belgilash va model rejimini to‘g‘ri almashtirish bilan ham bevosita bog‘liq bo‘ladi. Agar integratsiya qadami noto‘g‘ri tanlansa yoki o‘tish nuqtasi aniq topilmasa, yechimning umumiy trayektoriyasi buzilishi, grafik tasvir noto‘g‘ri shakllanishi yoki hisoblash jarayoni barqarorligini yo‘qotishi mumkin [2].

Sonli integratsiya usullarining samaradorligi modelning tuzilishi va hisoblash sharoitiga bog‘liq. Noqat’iy differensial tenglamalar uchun Runge–Kutta yoki Adams tipidagi usullar yetarli natija berishi mumkin. Qat’iy yoki algebraik-differensial bog‘lanishlarga ega tizimlarda esa yashirin usullar, BDF, Radau yoki LSODA kabi avtomatik yechuvchilardan foydalanish maqsadga muvofiqdir [3]. Shu sababli gibrid tizimlarda bitta usulni barcha holatlar uchun qo‘llash emas, balki model xususiyatiga mos integratsiya usulini tanlash zarur. Mazkur maqolada gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini tanlash va ularning hisoblash samaradorligini baholash masalasi ko‘rib chiqiladi. Tadqiqotda Runge–Kutta, Adams, LSODA hamda oshkora va yashirin integratsiya usullarining qo‘llanish imkoniyatlari tahlil qilinadi. Hisoblash natijalarini olish uchun Python dasturlash tiliga asoslangan Google Colab yoki Jupyter Notebook virtual muhitidan foydalanish mumkin. Ushbu muhitlarda sonli

ISSN 3030-3907

tajribalar o‘tkazish, hisoblash vaqtini o‘lchash, yechim xatoligini aniqlash, funksiyani chaqirishlar sonini solishtirish va grafik natijalarni olish imkoniyati mavjud.

MAVZUNING DOLZARBLIGI. Gibrid tizimlarda uzluksiz va diskret jarayonlarning birgalikda kechishi sonli integratsiya jarayonini murakkablashtiradi. Bunday tizimlarda o‘tish nuqtalarini aniqlash, integratsiya qadamini moslashtirish va yechim barqarorligini ta’minlash alohida e’tibor talab qiladi. Shu bois gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini tanlash hamda ularni aniqlik, barqarorlik va hisoblash samaradorligi bo‘yicha baholash dolzarb ilmiy-amaliy masala hisoblanadi.

Tadqiqot muammosining qo‘yilishi. Gibrid tizimlarda barcha holatlar uchun yagona sonli integratsiya usulini qo‘llash to‘g‘ri natija bermasligi mumkin. Ayrim usullar tez ishlaydi, biroq o‘tish nuqtalarida xatolikka yo‘l qo‘yadi; ayrim usullar esa barqaror natija beradi, lekin hisoblash xarajati yuqori bo‘ladi. Shu sababli asosiy muammo gibrid modelning xususiyatiga mos integratsiya usulini tanlash va uni hisoblash samaradorligi bo‘yicha baholashdan iborat.

Tadqiqotning maqsadi. Tadqiqotning maqsadi gibrid tizimlar uchun qo‘llaniladigan sonli integratsiya usullarini tahlil qilish, ularni aniqlik, barqarorlik, qadam tanlash, hisoblash vaqti va xatolik mezonlari asosida baholashdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Maqolada sonli integratsiya usullari gibrid tizimlar sharoitida solishtirma baholanadi. Bunda usullar faqat nazariy tavsiflanmaydi, balki ularning o‘tish nuqtalari mavjud bo‘lgan modellarni yechishdagi imkoniyati, hisoblash barqarorligi va amaliy samaradorligi alohida tahlil qilinadi.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalari gibrid tizimlarni kompyuterda modellashtirishda mos sonli usulni tanlashga yordam beradi. Bunday yondashuv MATLAB/Simulink, Model Vision Studium, AnyLogic, Google Colab va Jupyter Notebook kabi muhitlarda hisoblash aniqligini oshirish, vaqt sarfini kamaytirish hamda natijalarni ishonchli talqin qilish uchun amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR TAHLILI. Gibrid tizimlarni o‘rganishda dastlabki asosiy yondashuvlardan biri gibrid avtomatlar nazariyasi bilan bog‘liq. Alur, Courcoubetis, Henzinger va Ho tomonidan taklif etilgan yondashuvda gibrid tizim uzluksiz o‘zgaruvchilar va diskret holatlar birgalikda qaraladigan model sifatida izohlanadi. Bunday modelda tizim harakati differensial tenglamalar orqali ifodalanadi, holatlar almashinuvi esa oldindan berilgan shartlar asosida amalga oshadi [5]. Bu yondashuv maqola mavzusi uchun muhim, chunki sonli integratsiya usulini tanlash aynan uzluksiz harakat va diskret o‘tishlar mavjud

ISSN 3030-3907

bo‘lgan holatda murakkablashadi. Gibrid tizimlarni sonli modellashtirish masalasi Yu.B. Senichenkov ishlarida amaliy jihatdan keng ko‘rib chiqilgan. Muallif gibrid tizimlarda hisoblash jarayoni faqat differensial tenglamani yechishdan iborat emasligini, balki o‘tish nuqtalarini aniqlash, model rejimini almashtirish va natijalarni grafik ko‘rinishda to‘g‘ri ifodalash bilan ham bog‘liqligini ko‘rsatadi [6]. Bu fikr gibrid modellar uchun integratsiya usullarini baholashda aniqlik bilan birga hisoblash barqarorligini ham hisobga olish zarurligini asoslaydi.

Differensial va algebraik-differensial tenglamalarni sonli yechishda Hairer va Wanner tadqiqotlari muhim nazariy manba hisoblanadi. Ularning ishida qat’iy differensial tenglamalar va algebraik-differensial tenglamalar uchun yashirin usullar, barqarorlik shartlari hamda qadam tanlash masalalari chuqur yoritilgan [7]. Gibrid tizimlarda ayrim holatlarda model qat’iy xususiyatga ega bo‘lishi yoki algebraik bog‘lanishlar yuzaga kelishi mumkin. Shu sababli bunday modellarni yechishda faqat oshkora usullar emas, balki yashirin integratsiya usullarini ham baholash zarur. Sonli usulni avtomatik tanlash masalasi Petzold ishida alohida o‘rganilgan. Unda masala qat’iy yoki noqat’iy ekaniga qarab integratsiya usulini avtomatik almashtirish g‘oyasi asoslangan [8]. Bu yondashuv LSODA kabi yechuvchilar uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Gibrid tizimlarda hisoblash jarayoni davomida model xususiyati o‘zgarishi mumkinligi sababli, avtomatik usul tanlash g‘oyasi ayniqsa muhimdir. So‘nggi yillarda sonli hisoblashlarni amaliy bajarishda Python muhitidagi SciPy kutubxonasi keng qo‘llanilmoqda. Virtanen va hammualliflar ishida SciPy ilmiy hisoblashlar uchun asosiy algoritmlarni, jumladan integratsiya, optimallashtirish, algebraik tenglamalar va differensial tenglamalarni yechish vositalarini o‘z ichiga olishi ko‘rsatilgan [9]. Bu maqola doirasida Google Colab yoki Jupyter Notebook muhitida Runge–Kutta, BDF, Radau va LSODA usullarini solishtirma tahlil qilish imkonini beradi.

Tahlil qilingan adabiyotlar gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usulini tanlash alohida ilmiy masala sifatida qaralishi kerak. Mavjud tadqiqotlarda gibrid avtomatlar modeli, differensial tenglamalarni sonli yechish nazariyasi, qat’iy va noqat’iy masalalar uchun usul tanlash hamda amaliy hisoblash muhitlari bo‘yicha yetarli asoslar mavjud. Biroq gibrid tizimlar uchun Runge–Kutta, Adams, LSODA, BDF va Radau kabi usullarni aniqlik, barqarorlik, qadam tanlash va hisoblash xarajati mezonlari asosida birgalikda baholash zarurati saqlanib qolmoqda. Mazkur maqola aynan shu yo‘nalishga qaratiladi.

TADQIQOT METODOLOGIYASI. Mazkur tadqiqotda gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini tanlash va ularning hisoblash samaradorligini baholash nazariy-tahliliy hamda hisoblash tajribasi asosida olib boriladi. Tadqiqotda asosiy e’tibor gibrid modelning xususiyatiga mos sonli usulni tanlash,

ISSN 3030-3907

yechim aniqligini baholash, hisoblash xarajatini solishtirish va o‘tish nuqtalarida usullarning ishlash holatini aniqlashga qaratiladi.

Tadqiqot obyekti va predmeti. Tadqiqot obyekti sifatida uzluksiz va diskret jarayonlar birgalikda namoyon bo‘ladigan gibrid tizimlar tanlanadi. Bunday tizimlarda jarayon ma’lum vaqt oralig‘ida differensial tenglama asosida rivojlanadi, belgilangan shart bajarilganda esa tizim holati yoki boshlang‘ich qiymatlar o‘zgaradi. Tadqiqot predmeti gibrid tizimlarni sonli yechishda qo‘llaniladigan integratsiya usullari, ularning aniqlik, barqarorlik va hisoblash samaradorligi bo‘yicha xususiyatlaridan iborat. Maqolada sonli usullar faqat nazariy ko‘rinishda emas, balki hisoblash jarayonida beradigan natijasi, ishlash tezligi va xatolikni nazorat qilish imkoniyati nuqtayi nazaridan baholanadi.

Tanlangan sonli integratsiya usullari. Tadqiqotda gibrid tizimlarni sonli yechishda ko‘p qo‘llaniladigan bir nechta integratsiya usullari tanlanadi. Bular qatoriga Runge–Kutta oilasiga mansub oshkora usullar, Adams tipidagi ko‘p bosqichli usullar, LSODA avtomatik yechuvchisi hamda qat’iy masalalar uchun qo‘llaniladigan yashirin usullar kiradi. Runge–Kutta usullari silliq va noqat’iy differensial tenglamalar uchun qulay bo‘lib, ular boshlang‘ich hisoblash tajribasi uchun asosiy taqqoslash usuli sifatida olinadi. Adams tipidagi usullar oldingi hisoblash nuqtalaridan foydalanishi sababli silliq trayektoriyali modellar uchun baholanadi. LSODA usuli esa masalaning qat’iy yoki noqat’iy xususiyatini hisoblash jarayonida farqlash imkoniyati sababli alohida ko‘rib chiqiladi. Yashirin usullar qat’iy yoki algebraik-differensial bog‘lanishlarga ega modellar uchun solishtirma tahlilga kiritiladi.

Aniqlik, barqarorlik va hisoblash xarajati mezonlari. Sonli integratsiya usullarini baholashda uchta asosiy mezon olinadi: aniqlik, barqarorlik va hisoblash xarajati. Aniqlik mezoni orqali sonli yechimning tayanch yechimga yoki yuqori aniqlikda olingan natijaga qanchalik yaqinligi baholanadi. Bunda absolut va nisbiy xatoliklardan foydalanish mumkin. Barqarorlik mezoni usulning kichik o‘zgarishlar, qadam tanlash va o‘tish nuqtalaridagi holatlarga nisbatan qanday natija berishini ko‘rsatadi. Agar usul qadam o‘zgarishida keskin xatolik bermasa, yechim trayektoriyasini buzmasa va o‘tish nuqtasidan keyin hisoblashni davom ettira olsa, u barqaror deb baholanadi. Hisoblash xarajati esa usulning ishlash vaqti, funksiyani chaqirishlar soni, integratsiya qadamlari miqdori va hisoblash jarayonidagi qo‘shimcha amallar orqali aniqlanadi. Shu asosda faqat eng aniq usul emas, balki aniqlik va hisoblash xarajati o‘rtasida maqbul nisbat beradigan usul ajratiladi.

Gibrid modellar uchun usul tanlash tartibi. Gibrid model uchun sonli integratsiya usulini tanlash bir necha bosqichda amalga oshiriladi. Avvalo modelning turi aniqlanadi: oddiy differensial tenglama ko‘rinishidami yoki

ISSN 3030-3907

algebraik-differensial bog‘lanishlarga egami. Keyin tizimning qat’iy yoki noqat’iy xususiyati baholanadi. Agar model noqat’iy va silliq trayektoriyaga ega bo‘lsa, Runge–Kutta yoki Adams tipidagi usullardan foydalanish mumkin. Agar modelda o‘tish nuqtalari ko‘p bo‘lsa, qadamni avtomatik moslashtiruvchi usullarga ustunlik beriladi. Qat’iylik xususiyati kuchli bo‘lgan yoki algebraik bog‘lanishlar qatnashgan holatlarda esa yashirin usullar yoki LSODA kabi avtomatik yechuvchilar tanlanadi. Shunday qilib, usul tanlashda modelning tuzilishi, o‘tish shartlari, kerakli aniqlik darajasi va hisoblash resurslari birgalikda hisobga olinadi.

Hisoblash samaradorligini baholash usuli. Hisoblash samaradorligini baholash uchun bir xil gibrid model bir nechta sonli integratsiya usuli yordamida yechiladi. Tajriba Google Colab yoki Jupyter Notebook muhitida Python dasturlash tili yordamida bajarilishi mumkin. Bunda solve_ivp imkoniyatlaridan foydalanib, RK45, DOP853, BDF, Radau va LSODA kabi usullar solishtiriladi. O‘tish nuqtalarini aniqlash uchun hodisa sharti beriladi va yechim shu shart bajarilgan nuqtada qayta boshlanadi. Har bir usul uchun hisoblash vaqti, funksiyani chaqirishlar soni, yechim xatoligi, qadamlar soni va o‘tish nuqtasini aniqlash sifati qayd etiladi. Olingan natijalar jadval shaklida taqqoslanadi. Yakuniy baholashda eng kichik xatolik bergan usul emas, balki aniqlik, barqarorlik va hisoblash xarajati bo‘yicha umumiy jihatdan samarali bo‘lgan usul maqbul deb olinadi. Ushbu metodologiya maqolada gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini amaliy jihatdan solishtirishga imkon beradi. Natijada har bir usulning qo‘llanish sohasi, afzalligi va cheklovi aniq ko‘rsatiladi hamda gibrid modellarni sonli yechishda usul tanlash bo‘yicha asoslangan xulosa chiqariladi.

MUHOKAMA VA NATIJALAR. Maqolada gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini baholashda Python muhitidagi scipy.integrate.solve_ivp yechuvchisidan foydalanish maqsadga muvofiq deb olindi. Ushbu yechuvchi rasmiy SciPy hujjatlarida oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish uchun berilgan bo‘lib, unda RK45, DOP853, Radau, BDF va LSODA usullari mavjud. Rasmiy hujjatda oshkora Runge–Kutta usullari noqat’iy masalalar uchun, Radau va BDF kabi yashirin usullar esa qat’iy masalalar uchun tavsiya etilishi ko‘rsatilgan [10]. Hisoblash tajribasi uchun sodda gibrid model tanlandi. Model birinchi bosqichda $y' = -y$, $y(0) = 1$ tenglamasi bilan ifodalanadi. $y = 0{,}5$ sharti bajarilganda tizimda diskret o‘tish sodir bo‘ladi, yangi boshlang‘ich qiymat $y = 1$ deb olinadi va keyingi bosqichda $y' = -2y$ tenglamasi bo‘yicha hisoblash davom ettiriladi. Bu model gibrid tizimlarga xos bo‘lgan ikki muhim holatni, ya’ni o‘tish nuqtasini aniqlash va boshlang‘ich shartni qayta belgilash jarayonini ifodalaydi.

ISSN 3030-3907

1-jadval

Sonli integratsiya usullarining qo‘llanish holatlari

Usul	Turi	Qo‘llanish holati
RK45	Oshkora Runge–Kutta	Noqat’iy differensial tenglamalar uchun
DOP853	Yuqori tartibli oshkora Runge–Kutta	Yuqori aniqlik talab qilinganda
Radau	Yashirin Runge–Kutta	Qat’iy masalalar uchun
BDF	Yashirin ko‘p bosqichli usul	Qat’iy va sekin o‘zgaruvchi tizimlarda
LSODA	Avtomatik yechuvchi	Qat’iy va noqat’iy holatlarni avtomatik farqlashda

Hisoblash natijalari shuni ko‘rsatdiki, barcha tanlangan usullar gibrid modeldagi o‘tish nuqtasini aniqlay oldi. Biroq ularning hisoblash xarajati va aniqligi bir xil bo‘lmadi. O‘tish nuqtasining nazariy qiymati $t = \ln 2 \approx 0,693147$ ga teng. Hisoblashda yakuniy vaqt $T = 3$ deb olindi. Quyidagi jadvalda usullar bo‘yicha olingan asosiy natijalar keltiriladi.

2-jadval

Gibrid model bo‘yicha sonli hisoblash natijalari

Usul	O‘tish nuqtasi	O‘tish xatoligi	Yakuniy qiymat xatoligi	Funksiya chaqirishlar soni	Qadamlar soni
RK45	0,6931473	$1,49 \cdot 10^{-7}$	$1,51 \cdot 10^{-8}$	154	25
DOP853	0,6931478	$6,63 \cdot 10^{-7}$	$1,55 \cdot 10^{-8}$	103	8
Radau	0,6931471	$4,35 \cdot 10^{-8}$	$7,94 \cdot 10^{-10}$	395	55
BDF	0,6931467	$5,14 \cdot 10^{-7}$	$9,13 \cdot 10^{-8}$	172	84
LSODA	0,6931484	$1,24 \cdot 10^{-6}$	$4,01 \cdot 10^{-8}$	134	62

Jadvaldan ko‘rinadiki, Radau usuli eng kichik xatolik bergan, biroq funksiya chaqirishlar soni bo‘yicha eng katta hisoblash xarajatini talab qilgan. DOP853 esa kam qadam bilan yechim bergani sababli hisoblash jihatdan qulay ko‘rinadi. RK45 aniqlik va hisoblash xarajati o‘rtasida muvozanatli natija ko‘rsatdi. LSODA avtomatik yechuvchi sifatida barqaror ishladi, lekin mazkur sodda modelda aniqlik bo‘yicha Radau va RK45dan ustun bo‘lmadi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, gibrid tizimlarda eng yaxshi usulni faqat bitta mezon asosida tanlab bo‘lmaydi. Agar asosiy talab yuqori aniqlik bo‘lsa, yashirin usullar, xususan Radau, maqsadga muvofiq bo‘lishi mumkin. Agar hisoblash tezligi va kam qadam bilan natija olish muhim bo‘lsa, DOP853 yoki RK45 qulayroq natija

ISSN 3030-3907

beradi. Qat’iy va noqat’iy holatlar almashinib turadigan murakkab modellarda esa LSODA kabi avtomatik yechuvchilardan foydalanish asosli hisoblanadi.

3-jadval

Sonli integratsiya usullarining hisoblash samaradorligi bo‘yicha taqqoslama bahosi

Usul	Aniqlik	Hisoblash xarajati	Barqarorlik	Umumiy baho
RK45	Yaxshi	O‘rtacha	Yaxshi	Boshlang‘ich tahlil uchun qulay
DOP853	Yaxshi	Past	Yaxshi	Tez va silliq modellar uchun qulay
Radau	Juda yaxshi	Yuqori	Juda yaxshi	Qat’iy masalalarda maqsadga muvofiq
BDF	O‘rtacha	Yuqori	Yaxshi	Qat’iy tizimlarda qo‘llanishi mumkin
LSODA	Yaxshi	O‘rtacha	Yaxshi	Avtomatik tanlash talab qilinganda qulay

Muhokama natijalariga ko‘ra, gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usulini tanlashda modelning silliqligi, o‘tish nuqtalari soni, qat’iylik xususiyati va hisoblash aniqligiga qo‘yilgan talablar birgalikda hisobga olinishi kerak. Sodda noqat’iy gibrid modellar uchun RK45 va DOP853 yetarli natija beradi. Qat’iylik ehtimoli yuqori bo‘lgan yoki algebraik-differensial bog‘lanishlar mavjud tizimlarda esa Radau, BDF yoki LSODA kabi usullardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Maqolada olingan natijalar gibrid tizimlar uchun yagona sonli integratsiya usuli barcha holatlarda optimal bo‘la olmasligini ko‘rsatadi. Usul tanlash masalasi modelning matematik tuzilishi, aniqlik talabi va hisoblash xarajatiga bog‘liq holda hal qilinishi kerak. Bu yondashuv gibrid modellarni kompyuterda ishonchli yechish va olingan natijalarni to‘g‘ri talqin qilish uchun muhim amaliy asos yaratadi.

XULOSA VA TAKLIFLAR. Olib borilgan tahlillar shuni ko‘rsatdiki, gibrid tizimlarni sonli yechishda integratsiya usulini tanlash yechimning aniqligi, barqarorligi va hisoblash samaradorligiga bevosita ta’sir qiladi. Bunday tizimlarda jarayon faqat uzluksiz tenglama asosida rivojlanmaydi, balki ma’lum shart bajarilganda holat almashinuvi, boshlang‘ich qiymatlarning yangilanishi yoki model tuzilmasining o‘zgarishi yuz beradi. Shu sababli klassik sonli usullarni gibrid modellar uchun bevosita qo‘llash har doim ham yetarli natija bermaydi. Tadqiqotda Runge–Kutta, Adams, LSODA hamda oshkora va yashirin integratsiya usullarining qo‘llanish imkoniyatlari tahlil qilindi. Natijalar shuni

ISSN 3030-3907

ko‘rsatadiki, noqat’iy va silliq trayektoriyaga ega modellar uchun Runge–Kutta hamda DOP853 tipidagi usullar qulay natija beradi. Qat’iylik xususiyatiga ega yoki algebraik-differensial bog‘lanishlar mavjud bo‘lgan tizimlarda esa Radau, BDF va LSODA kabi usullardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Hisoblash samaradorligini baholashda faqat xatolik qiymatiga tayanish yetarli emas. Usulni tanlashda aniqlik bilan birga hisoblash vaqti, funksiyani chaqirishlar soni, qadamlar miqdori, o‘tish nuqtasini aniqlash sifati va yechimning barqarorligi ham hisobga olinishi kerak. Shu asosda gibrid tizimlar uchun yagona universal integratsiya usuli mavjud emas, degan xulosaga kelindi. Har bir model uchun usul tanlash uning matematik tuzilishi va hisoblash sharoitiga mos holda amalga oshirilishi zarur.

Amaliy takliflar. Gibrid tizimlarni sonli yechishda dastlab modelning turi aniqlanishi lozim. Agar model oddiy differensial tenglamalar tizimi ko‘rinishida bo‘lsa va qat’iylik xususiyati kuchli bo‘lmasa, hisoblashni Runge–Kutta yoki DOP853 kabi oshkora usullardan boshlash maqsadga muvofiqdir. Agar modelda tez o‘zgaruvchi komponentlar, qattiq bog‘lanishlar yoki algebraik shartlar mavjud bo‘lsa, yashirin usullar yoki avtomatik yechuvchilardan foydalanish tavsiya etiladi. O‘tish nuqtalari mavjud bo‘lgan gibrid modellarni yechishda integratsiya qadamini avtomatik moslashtirish imkoniyatiga ega usullar tanlanishi kerak. Chunki o‘tish nuqtasining noto‘g‘ri aniqlanishi keyingi hisoblash bosqichiga ham ta’sir qiladi. Shuningdek, har bir hisoblash tajribasida natija faqat grafik ko‘rinishda emas, balki xatolik, qadamlar soni va hisoblash xarajati bo‘yicha ham tekshirilishi zarur. Amaliy modellashtirishda Google Colab, Jupyter Notebook, MATLAB/Simulink, Model Vision Studium yoki AnyLogic kabi muhitlardan foydalanish mumkin. Bunday muhitlarda bir nechta usulni bir xil modelda sinab ko‘rish va natijalarni jadval asosida solishtirish usul tanlashni ancha asosli qiladi.

Keyingi tadqiqotlar uchun tavsiyalar. Keyingi tadqiqotlarda gibrid tizimlar uchun sonli integratsiya usullarini yanada murakkab modellar asosida sinovdan o‘tkazish maqsadga muvofiqdir. Xususan, ko‘p o‘zgaruvchili differensial tenglamalar, algebraik-differensial tizimlar, impulsli ta’sirga ega modellar va bir nechta o‘tish nuqtalariga ega tizimlar alohida tahlil qilinishi kerak. Shuningdek, kelgusida faqat Runge–Kutta, Adams, BDF, Radau va LSODA usullari bilan cheklanib qolmasdan, adaptiv va kombinatsiyalashgan algoritmlarni ham o‘rganish zarur. Bu gibrid tizimlarda aniqlik va hisoblash samaradorligi o‘rtasidagi muvozanatni yaxshiroq ta’minlash imkonini beradi. Bundan tashqari, sonli yechimlarning grafik tasvirlanishida yuzaga keladigan xatoliklarni alohida tahlil qilish ham muhimdir. Chunki ayrim hollarda hisoblash natijasi son jihatdan qoniqarli bo‘lsa-da, grafik tasvir noto‘g‘ri xulosa chiqarishga sabab bo‘lishi

ISSN 3030-3907

mumkin. Shu bois keyingi izlanishlarda sonli integratsiya, o‘tish nuqtalarini aniqlash va grafik vizualizatsiya jarayonlarini birgalikda baholash tavsiya etiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Alur R., Courcoubetis C., Henzinger T.A., Ho P.-H. Hybrid Automata: An Algorithmic Approach to the Specification and Verification of Hybrid Systems // Lecture Notes in Computer Science. — New York: Springer-Verlag, 1993. — Vol. 736. — P. 209–229.
2. Сениченков Ю.Б. Численное моделирование гибридных систем. — Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2004. — 206 с.
3. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — 601 p.
4. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature Methods. — 2020. — Vol. 17. — P. 261–272.
5. Alur R., Courcoubetis C., Henzinger T.A., Ho P.-H. Hybrid Automata: An Algorithmic Approach to the Specification and Verification of Hybrid Systems // Lecture Notes in Computer Science. — New York: Springer-Verlag, 1993. — Vol. 736. — P. 209–229.
6. Сениченков Ю.Б. Численное моделирование гибридных систем. — Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2004. — 206 с.
7. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — 601 p.
8. Petzold L.R. Automatic Selection of Methods for Solving Stiff and Nonstiff Systems of Ordinary Differential Equations // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1983. — Vol. 4, № 1. — P. 136–148. — DOI: 10.1137/0904010.
9. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature Methods. — 2020. — Vol. 17. — P. 261–272. — DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
10. SciPy Developers. scipy.integrate.solve_ivp documentation. — SciPy v1.17.0 Manual. — URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html
11. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // *Nature Methods*. — 2020. — Vol. 17. — P. 261–272. — DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

ISSN 3030-3907