ISNN 3030-3907

2026
MAY
ISSUE - 5
VOLUME -10

DEVELOPMENT OF SCIENCE

scientific journal



Development of science

Ilmiy jurnal

MAY 2026
Issue - 5, VOLUME – 10

ISSN 3030 -3907

Ilmiy jurnal OAK rayosatining 2024 yil 27 sentabrdagi 361-son qaroriga asosan 02.00.00 kimyo fanlari hamda 2025 yil 12 fevral 367- son qaroriga asosan 05.00.00 texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) va fan doktori (DSc) ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari yuzasidan dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR:
Temirov Alisher Hoshim o‘g‘li – texnika fanlari falsafa doktori (PhD),Dotsent.
TAHRIRIYAT KENGASH RAISI:
Fozilov Sadriddin Fayzullayevich – texnika fanlari doktori, professor
TAHRIRIYAT KENGASH A’ZOLARI

TEXNIKA FANLARI/ TECHNICAL SCIENCES/ ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Bozorov G‘ayrat Rashidovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Abdurahmonov Olim Rustamovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Adizov Bobur Zamirovich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Umumiy va noorganik kimyo instituti, professor
Hayitov Ruslan Rustamjonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Jumayev Qayum Karimovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Berdiyev Dorob Murodovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor
Maxmudov Rafiq Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Tilloyev Lochin Ismatilloyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Raxmonov Qahramon Sanakulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Barakayev Nusratullo Rajabovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor.
Jo‘rayev Xayrullo Fayziyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Panoyev Erali Rajabboyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Ataullayev Sherzod Nabiullyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Malik Negmurodovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Axmedova Ozoda Bahronovna
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti.
Safarov Bahri Jumayevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Xaydarov Axtam Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Safarov Jasur Alijon o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

KIMYO FANLARI/ CHEMICAL SCIENCES/ ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Axmedov Voxid Nizomovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Umarov Baqo Bafoyevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Kodirov Abduaxad Abduraximovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Qurbonov Mingniqul Jumagulovich
Qarshi davlat Universiteti, dotsent
Turemuratov Sharibay Naurizbaevich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Qoraqalpog‘iston bo‘limi Bosh ilmiy kotibi, professor
Tursunov Kaxor Shonazarovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Do‘stov Hamro
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Panoyev Nodir Shavkatovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Olimov Bobur Bahodir o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Kasimov Sherzod Abduazimovich
Termiz Davlat Universiteti, professor.
Aliqulov Rustam Valiyevich
Termiz Davlat Universiteti, professor
Tropov Xamza Tursunovich
Samarqand Davlat Universiteti, professor

IQTISODIYOT FANLARI/ ECONOMICS/ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Nizamov Aslitdin Badreddinovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Boboyev Akmal Choriyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Ergashxojayeva Shaxnoza Djasurovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Saidaxmedova Nodira Ilxomovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Muxsinov Bekzod Toxirovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shakarov Qulmat Ashirovich
Renessans ta'lim universiteti,dotsent.
Jumaeva Zulfiya Qayumovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Norova Salomat Yusupovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Avezova Shaxnoza Maxmudjonovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Jalilov Jamshid G‘anijonovich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, dotsent
Xasanova Gulruh Djumanazarovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

PEDAGOGIKA FANLARI/ PEDAGOGICAL SCIENCES / ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Siddiqova Sadoqat G‘afforovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Zoyirov Erkin Xalilovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, DSc, professor
Gaffarov Feruz Hasanovich
Puchon Universiteti, *professor*
Ruziyev Davron Yuldashevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Muradova Firuza Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Yunusova Gulandon Samiyevna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
To‘xtayeva Zebo Sharifovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Navro‘zova Gulchixra Nigmatovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Uzoqova Laylo Polvonovna
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.
To‘raqulova Marjona Qiyom qizi
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Muradova Zarina Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Sanjar Aslonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shodiyev Jahongir Jo‘raqulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent
Gaffarov Laziz Hasanovich
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.

Tahririyat a’zolarning to‘liq ro‘yxati jurnalning www.devos.uz saytida keltirilgan.

Tahririyat hay’ati a’zolarining tarkibini o‘zgartirish hamda qo‘shimcha kiritish yoki tahririyat a’zoligidan chiqarish bosh muharrir tomonidan amalga oshiriladi.

ISSN 3030-3907

Development of science ilmiy jurnali 2024 yil 15 aprel kuni №256445 sonli guvohnoma bilan Davlat ro‘yxatidan o‘tgan.

To‘plam elektron ko‘rinishda (pdf formatida) mualliflarga taqdim etiladi. To‘plamga kiritiladigan maqolalarning mazmuni, ulardagi statistik ma’lumotlar va me’yoriy hujjatlarning to‘g‘riligiga hamda har qanday fikr - mulohazalarga mualliflarning o‘zlari mas’ul hisoblanadilar. Talablarga javob bermaydigan maqolalar to‘plamga kiritilmaydi. Tashkiliy qo‘mita maqola matnini qisqartirish, qisman tuzatish kiritish, seksiyalarga joylashtirish huquqiga ega.

ISSN 3030-3907

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО ОПЕРАТОРА РАСПОЗНАВАНИЯ ДЕЙСТВИЙ НА ОСНОВЕ СКЕЛЕТНЫХ ДАННЫХ

Кабул Худайбергенов
Международный университет Кимё в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан, доктор философии, доцент;
E-mail: kabul.kudaybergenov@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель распознавания действий человека на основе скелетных данных, представляющая собой композицию нескольких функциональных операторов: извлечения скелетной последовательности из видеоданных, формирования множественных латентных признаковых представлений, графово-временного кодирования, классификации и ансамблевого объединения. Доказаны три вспомогательные леммы об устойчивости по Липшицу последовательной композиции операторов, а также их параллельного объединения в евклидовой и max-нормах. На основе указанных лемм сформулирована и доказана теорема о корректности и устойчивости композиционного оператора LFHAR, дающая явное выражение для константы Липшица всей системы. Полученные результаты обеспечивают теоретические гарантии надёжности алгоритма распознавания при малых возмущениях входных данных. Приведён численный пример оценки константы Липшица для конкретной конфигурации.

Ключевые слова: липшицева непрерывность, композиционный оператор, скелетные данные, распознавание действий, графовые нейронные сети, устойчивость.

Abstract. This paper considers a mathematical model for human action recognition based on skeleton data, which is represented as a composition of several functional operators: extraction of a skeleton sequence from video data, formation of multiple latent feature representations, graph-temporal encoding, classification, and ensemble aggregation. Three auxiliary lemmas on the Lipschitz stability of the sequential composition of operators, as well as their parallel aggregation in Euclidean and max norms, are proved. Based on these lemmas, a theorem on the correctness and stability of the compositional LFHAR operator is formulated and proved, providing an explicit expression for the Lipschitz constant of the entire system. The obtained results provide theoretical guarantees of the reliability of the recognition algorithm under small perturbations of the input data. A numerical example for estimating the Lipschitz constant for a specific configuration is presented.

ISSN 3030-3907

Keywords: Lipschitz continuity, compositional operator, skeleton data, action recognition, graph neural networks, stability.

Annotatsiya. Ishda skelet ma’lumotlariga asoslangan inson harakatlarini tanib olishning matematik modeli ko‘rib chiqiladi. Ushbu model bir nechta funksional operatorlar kompozitsiyasi sifatida ifodalanadi: videoma’lumotlardan skelet ketma-ketligini ajratib olish, ko‘p sonli latent belgilar tasvirlarini shakllantirish, graf-vaqtli kodlash, tasniflash va ansambl asosida birlashtirish. Operatorlarning ketma-ket kompozitsiyasi hamda ularning Yevklid va max-normalardagi parallel birlashtirilishining Lipshits bo‘yicha barqarorligi haqida uchta yordamchi lemma isbotlangan. Mazkur lemmalar asosida LFHAR kompozitsion operatorining korrektligi va barqarorligi haqidagi teorema shakllantirilib, isbotlangan hamda butun tizim uchun Lipshits konstantasining aniq ifodasi berilgan. Olingan natijalar kiruvchi ma’lumotlarning kichik g‘alayonlari sharoitida tanib olish algoritmining ishonchliligiga nazariy kafolatlar beradi. Muayyan konfiguratsiya uchun Lipshits konstantasini baholashga oid sonli misol keltirilgan.

Kalit so‘zlar: Lipshits uzluksizligi, kompozitsion operator, skelet ma’lumotlari, harakatlarni tanib olish, graf neyron tarmoqlari, barqarorlik.

ВВЕДЕНИЕ.

Распознавание действий человека на основе скелетных данных является одним из важных направлений современного интеллектуального анализа видеопоследовательностей. В отличие от методов, непосредственно использующих RGB-кадры или оптический поток, скелетное представление описывает движение человека через последовательность координат ключевых точек тела и тем самым позволяет существенно уменьшить размерность входных данных, повысить интерпретируемость признаков и снизить зависимость модели от фона, освещения и внешнего вида объекта. Благодаря этим свойствам скелетные модели широко применяются в системах видеонаблюдения, человеко-компьютерного взаимодействия, спортивной аналитики, мониторинга безопасности и интеллектуального анализа поведения.

Существенный прогресс в данной области связан с развитием графовых нейронных сетей, в которых скелет человека естественным образом представляется в виде графа: вершины соответствуют суставам или ключевым точкам, а рёбра отражают анатомические и временные связи между ними. Базовая модель ST-GCN заложила основу пространственно-временного графового анализа скелетных последовательностей [1]. В дальнейшем были предложены более гибкие архитектуры, учитывающие канально-зависимую топологию графа [2], информационно-ориентированные латентные представления [3], иерархическую

ISSN 3030-3907

декомпозицию скелетной структуры [4], а также блочные графовые механизмы, повышающие топологическую выразительность моделей [5]. Указанные подходы демонстрируют высокую практическую эффективность, однако большинство исследований ориентировано преимущественно на повышение точности классификации, тогда как вопросы математической устойчивости и корректности таких моделей изучены недостаточно полно.

Практическая надёжность систем распознавания действий существенно зависит от устойчивости модели к малым возмущениям входных данных. В реальных условиях координаты скелетных точек могут содержать ошибки, возникающие вследствие шума сенсоров, частичных окклюзий, неточностей алгоритмов оценки позы, квантования координат, изменения ракурса камеры и нестабильности трекинга. Современные методы оценки позы, включая архитектуры на основе Vision Transformer, позволяют получать высококачественные скелетные признаки [13]; тем не менее даже небольшие ошибки на этапе извлечения ключевых точек могут распространяться через последующие графово-временные и классификационные блоки. Поэтому для теоретического анализа таких систем важно иметь количественную оценку того, насколько изменение входной видеопоследовательности может повлиять на выходной вектор вероятностей классов.

Одним из наиболее естественных инструментов для такого анализа является липшицева непрерывность. Если оператор распознавания является липшицевым, то малое изменение входа приводит к ограниченному изменению выхода, причём величина этого ограничения задаётся константой Липшица. В теории глубоких нейронных сетей оценка этой константы является нетривиальной задачей: точное вычисление глобальной константы Липшица даже для сравнительно простых сетевых структур может быть вычислительно сложным [6]. В связи с этим в литературе развиваются методы верхней оценки и сертификации констант Липшица, включая SDP-подходы [7], анализ слоистых операторных структур [8] и алгебраические конструкции липшицевых нейронных слоёв [9]. Кроме того, связь между константой Липшица, margin-критерием и сертифицируемой устойчивостью нейронных сетей показывает, что анализ липшицевой устойчивости имеет не только теоретическое, но и прикладное значение для оценки робастности классификаторов [10].

Для моделей, основанных на скелетных графах, особое значение имеет устойчивость графовой компоненты. Теоретические результаты по устойчивости графовых нейронных сетей показывают, что при

ISSN 3030-3907

определённых условиях графовые фильтры и GNN-операторы могут быть устойчивы к возмущениям структуры графа и входных сигналов [11]. Более детальные оценки для спектральных графовых фильтров позволяют интерпретировать влияние локальных изменений графа, например добавления или удаления рёбер, на выход модели [12]. Эти результаты важны для анализа распознавания действий, поскольку скелетный граф может изменяться под влиянием ошибок оценки позы, пропуска суставов или вариаций представления тела. Отдельную роль играет и композиционная природа современных архитектур: оператор распознавания обычно включает последовательность блоков извлечения признаков, графово-временного кодирования, классификации и ансамблевого объединения. Анализ таких цепочек связан с общим свойством композиции липшицевых отображений, однако прямое перемножение покомпонентных констант часто приводит к завышенным оценкам [8]. Для архитектур с attention-компонентами также требуется отдельная осторожность, поскольку стандартный self-attention не всегда обладает глобальным свойством Липшица на неограниченной области [14].

В настоящей статье рассматривается композиционный оператор LFHAR (*Latent Features for Human Action Recognition*), описывающий распознавание действий человека на основе скелетных данных как последовательное и параллельное объединение нескольких функциональных отображений. Основная идея работы состоит в том, чтобы представить всю систему как математически корректную композицию операторов извлечения скелета, формирования латентных признаков, графово-временного кодирования, классификации и ансамблевого объединения, а затем получить явную верхнюю оценку константы Липшица для итогового оператора. Такой подход позволяет связать устойчивость всей модели с устойчивостью её отдельных компонентов и получить количественную гарантию робастности относительно малых возмущений входных данных.

Целью статьи является доказательство устойчивости по Липшицу композиционного оператора LFHAR и вывод явной оценки его константы Липшица. Для достижения указанной цели решаются следующие задачи: формализуется операторная модель распознавания действий по скелетным последовательностям; доказываются вспомогательные леммы о свойстве Липшица для последовательной композиции и параллельного объединения операторов; формулируется и доказывается основная теорема о корректности и устойчивости LFHAR; приводится численный пример, демонстрирующий применение полученной оценки. Научная значимость

ISSN 3030-3907

работы заключается в том, что она дополняет эмпирические исследования skeleton-based HAR строгим операторным анализом и задаёт основу для последующей разработки сертифицируемо-устойчивых моделей распознавания действий.

Структура работы организована следующим образом. В раздел 2 вводятся обозначения и формализуется композиционная модель. В разделе 3 формулируются и доказываются три вспомогательные леммы о свойстве Липшица для составных конструкций. В разделе 4 доказывается основная теорема о корректности и устойчивости оператора LFHAR.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Везде далее $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_{\mathrm{X}})$, $(\mathrm{Y}, \|\cdot\|_{\mathrm{Y}})$ и аналогичные пары обозначают вещественные нормированные пространства. Отображение $F : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ называется *липшицевым отображением* с константой $L..0$, если для всех $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ выполнено

$$\| F(x_1) - F(x_2) \|_{\mathrm{Y}} \,,, L \| x_1 - x_2 \|_{\mathrm{X}} \,. \qquad (1)$$

Наименьшая такая константа обозначается через $\mathrm{Lip}(F)$.

2.1 Композиционная модель LFHAR

Введём пространства, фигурирующие в модели LFHAR:

- V - пространство видеоданных;
- S - пространство скелетных последовательностей;
- $\{\mathrm{F}_i\}_{i=1}^{N}$ - пространства латентных признаковых представлений;
- Z - пространство скрытых динамических признаков;
- $\mathrm{P} \subset \square^{K}$ - пространство векторов вероятностных распределений на множестве K классов действий;
- $\mathrm{C} = \{1, \ldots, K\}$ - конечное множество классов.

Композиционная модель LFHAR определяется следующими операторами:

$\Phi_{\mathrm{skel}} : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$, (извлечение скелета);

$\Phi_{\mathrm{LF},i} : \mathrm{S} \to \mathrm{F}_i$, $i = 1, \ldots, N$, (формирование i-го латентного признака);

$\Phi_{\mathrm{GCN},i} : \mathrm{F}_i \to \mathrm{Z}_i$, $i = 1, \ldots, N$, (графово-временное кодирование);

$\Phi_{\mathrm{cls},i} : \mathrm{Z}_i \to \mathrm{P}$, $i = 1, \ldots, N$, (классификатор с многосвязными весами);

$\Phi_{\mathrm{ens}} : \mathrm{P}^{N} \to \mathrm{P}$, (ансамблевое объединение).

Общий оператор распознавания записывается в виде

$$\Phi(v) = \Phi_{\mathrm{ens}}\left(\left(\Phi_{\mathrm{cls},i} \circ \Phi_{\mathrm{GCN},i} \circ \Phi_{\mathrm{LF},i} \circ \Phi_{\mathrm{skel}} \right)(v) \Big|_{i=1}^{N} \right). \qquad (2)$$

ISSN 3030-3907

В дальнейшем будем предполагать, что произведение $\prod_{i=1}^{N} \mathrm{P}$ снабжается евклидовой нормой:

$$\left\| (p_1,\dots,p_N) \right\|_{2,\mathrm{P}^N} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \| p_i \|_{\mathrm{P}}^2 \Big)^{1/2}, \qquad (3)$$

а на тензоре латентных признаков (см. Лемму 3 ниже) рассматривается max-норма.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ.

3.1 Устойчивость последовательной композиции

Лемма 1 (Устойчивость последовательной композиции). Пусть $(\mathrm{X}_0, \|\cdot\|_0)$, $(\mathrm{X}_1, \|\cdot\|_1)$, $(\mathrm{X}_2, \|\cdot\|_2)$ - нормированные пространства, и операторы

$$F : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_1, \qquad G : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$$

удовлетворяют условиям Липшица с константами $L_F..0$ и $L_G..0$ соответственно. Тогда композиция $H := G \circ F : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_2$ также является липшицевым отображением, причём

$$Lip(H)\!,\!, L_F L_G. \qquad (4)$$

Доказательство. Возьмём произвольные $x, x' \in \mathrm{X}_0$. По определению липшицевости оператора G:

$$\| G(F(x)) - G(F(x')) \|_2 \!,\!, L_G \| F(x) - F(x') \|_1 .$$

Применяя условие Липшица для F, имеем

$$\| F(x) - F(x') \|_1 \!,\!, L_F \| x - x' \|_0 .$$

Подставляя последнее неравенство в предыдущее, получаем

$$\| H(x) - H(x') \|_2 = \| G(F(x)) - G(F(x')) \|_2 \!,\!, L_G L_F \| x - x' \|_0 .$$

В силу произвольности выбора x и x' это и означает, что H является липшицевым отображением с константой не более $L_F L_G$. Таким образом, оценка (4) установлена.□

ЗАМЕЧАНИЕ. В Лемме 1 установлено лишь верхнее ограничение на константу Липшица композиции. В общем случае точная константа может быть строго меньше произведения $L_F L_G$, однако для целей анализа устойчивости важна именно равномерная оценка сверху.

3.2 Параллельное объединение операторов: евклидова норма

Лемма 1 (Устойчивость параллельного объединения, евклидова норма) Пусть $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_{\mathrm{X}})$ - нормированное пространство, и для каждого $i = 1,\dots,N$ заданы нормированное пространство $(\mathrm{Y}_i, \|\cdot\|_i)$ и оператор

ISSN 3030-3907

$F_i : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_i$, являющийся липшицевым с константой $L_i . . 0$. Рассмотрим прямое произведение

$$\mathrm{Y} := \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Y}_i,$$

снабжённое евклидовой нормой

$$\| (y_1, \ldots, y_N) \|_{\mathrm{Y}} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \| y_i \|_i^2 \Big)^{1/2}. \qquad (5)$$

Определим оператор $F : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ покомпонентно:

$$F(x) = \big(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x) \big).$$

Тогда F является липшицевым отображением, и

$$\mathrm{Lip}(F) \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} L_i^2 \Big)^{1/2}. \qquad (6)$$

Доказательство. Возьмём произвольные $x, x' \in \mathrm{X}$. По определению нормы (5):

$$\| F(x) - F(x') \|_{\mathrm{Y}}^2 = \sum_{i=1}^{N} \| F_i(x) - F_i(x') \|_i^2 .$$

Применяя условие Липшица к каждому компоненту F_i, получаем

$$\| F_i(x) - F_i(x') \|_i^2 \leq L_i^2 \| x - x' \|_{\mathrm{X}}^2, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Суммируя эти неравенства, имеем

$$\| F(x) - F(x') \|_{\mathrm{Y}}^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} L_i^2 \Big) \| x - x' \|_{\mathrm{X}}^2 .$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей (что допустимо в силу неотрицательности всех величин), получаем

$$\| F(x) - F(x') \|_{\mathrm{Y}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} L_i^2 \Big)^{1/2} \| x - x' \|_{\mathrm{X}} .$$

В силу произвольности x, x' это даёт оценку (6).□

3.3 Параллельное объединение операторов: max-норма

Лемма 3 (Устойчивость покомпонентного отображения с max-нормой). Пусть $(\mathrm{X}, \| \cdot \|_{\mathrm{X}})$ --- нормированное пространство, и для каждого $i = 1, \ldots, N$ заданы нормированное пространство $(\mathrm{Y}_i, \| \cdot \|_i)$ и оператор $F_i : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_i$, являющийся липшицевым с константой $L_i . . 0$. Рассмотрим прямое произведение $\mathrm{Y} = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Y}_i$ с max-нормой:

$$\| (y_1, \ldots, y_N) \|_{\infty, \mathrm{Y}} = \max_{1 \leq i \leq N} \| y_i \|_i . \qquad (7)$$

ISSN 3030-3907

Определим оператор $F : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ покомпонентно:

$$F(x)=\big(F_1(x),F_2(x),\ldots,F_N(x)\big).$$

Тогда F является липшицевым отображением, и

$$\mathrm{Lip}(F)\le \max_{1\le i\le N} L_i. \qquad (8)$$

Доказательство. Возьмём произвольные $x,x'\in \mathrm{X}$ и положим $L^*:=\max_{1\le i\le N} L_i$. По определению max-нормы (7) существует индекс $j=j(x,x')\in\{1,\ldots,N\}$ (вообще говоря, зависящий от выбора пары точек), такой что

$$\big\| F(x)-F(x')\big\|_{\infty,\mathrm{Y}}=\big\| F_j(x)-F_j(x')\big\|_j .$$

По условию Липшица для F_j:

$$\big\| F_j(x)-F_j(x')\big\|_j\le L_j\big\| x-x'\big\|_{\mathrm{X}}\le L^*\big\| x-x'\big\|_{\mathrm{X}},$$

где последнее неравенство следует из определения L^*.

Объединяя оба неравенства, получаем

$$\big\| F(x)-F(x')\big\|_{\infty,\mathrm{Y}}\le L^*\big\| x-x'\big\|_{\mathrm{X}} .$$

Поскольку x и x' выбраны произвольно, это доказывает оценку (8).□

ЗАМЕЧАНИЕ. Леммы 2 и 3 согласованы с известным фактом эквивалентности норм в конечномерных пространствах. Действительно, для любого вектора $(a_1,\ldots,a_N)\in\mathbb{R}^N$ справедливы неравенства

$$\max_i |a_i|\le \Big(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\Big)^{1/2}\le \sqrt{N}\max_i |a_i| .$$

Поэтому оценка (8) в max-норме не превосходит оценку (6) в евклидовой норме, переведённую в max-норму с помощью эквивалентности.

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА: УСТОЙЧИВОСТЬ ОПЕРАТОРА LFHAR

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема 1 (Корректность и устойчивость композиционного оператора LFHAR). Пусть в композиционной модели (2) выполнены следующие условия Липшица:

(1) оператор извлечения скелета $\Phi_{\mathrm{skel}} : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ является липшицевым с константой $L_{\mathrm{skel}}\ge 0$;

(2) для каждого $i\in\{1,\ldots,N\}$ оператор $\Phi_{\mathrm{LF},i} : \mathrm{S} \to \mathrm{F}_i$ является липшицевым с константой $L_{\mathrm{LF},i}\ge 0$;

(3) для каждого $i\in\{1,\ldots,N\}$ оператор $\Phi_{\mathrm{GCN},i} : \mathrm{F}_i \to \mathrm{Z}_i$ является липшицевым с константой $L_{\mathrm{GCN},i}\ge 0$;

ISSN 3030-3907

(5) для каждого $i \in \{1,\dots,N\}$ оператор $\Phi_{\text{cls},i} : \mathrm{Z}_i \to \mathrm{P}$ является липшицевым с константой $L_{\text{cls},i} \geq 0$;

(5) ансамблевый оператор $\Phi_{\text{ens}} : \mathrm{P}^N \to \mathrm{P}$ является липшицевым относительно нормы $\|\cdot\|_{2,\mathrm{P}^N}$ на произведении и евклидовой нормы на P с константой $L_{\text{ens}} \geq 0$.

Тогда оператор $\Phi : \mathrm{V} \to \mathrm{P}$, определённый формулой (2), корректно определён, является липшицевым (а следовательно, устойчивым по Липшицу) и его константа Липшица допускает оценку

$$\mathrm{Lip}(\Phi) \leq L_{\text{ens}} \cdot L_{\text{skel}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{N} \big(L_{\text{LF},i} L_{\text{GCN},i} L_{\text{cls},i}\big)^2\Big)^{1/2}. \qquad (9)$$

В частности, если все покомпонентные константы одинаковы, то есть $L_{\text{LF},i} = L_{\text{LF}}$, $L_{\text{GCN},i} = L_{\text{GCN}}$, $L_{\text{cls},i} = L_{\text{cls}}$ для всех $i = 1,\dots,N$, то

$$Lip(\Phi) \leq \sqrt{N} \cdot L_{\text{ens}} \cdot L_{\text{skel}} \cdot L_{\text{LF}} \cdot L_{\text{GCN}} \cdot L_{\text{cls}}. \qquad (10)$$

Доказательство. Доказательство проводится последовательно, в четыре шага.

Шаг 1: липшицевость ветвей. Зафиксируем индекс $i \in \{1,\dots,N\}$ и рассмотрим i-ю ветвь модели LFHAR:

$$\Psi_i := \Phi_{\text{cls},i} \circ \Phi_{\text{GCN},i} \circ \Phi_{\text{LF},i} : \mathrm{S} \to \mathrm{P}.$$

По условию (2)-(4) теоремы каждый из операторов $\Phi_{\text{LF},i}$, $\Phi_{\text{GCN},i}$, $\Phi_{\text{cls},i}$ является липшицевым. Применяя Лемму 1 последовательно (сначала к композиции $\Phi_{\text{GCN},i} \circ \Phi_{\text{LF},i}$, затем к её композиции с $\Phi_{\text{cls},i}$), получаем, что оператор Ψ_i является липшицевым и

$$\mathrm{Lip}(\Psi_i) \leq L_{\text{LF},i} L_{\text{GCN},i} L_{\text{cls},i} =: \Lambda_i. \qquad (11)$$

Подчеркнём, что величина Λ_i зависит только от характеристик i-й ветви и не зависит от других ветвей модели.

Шаг 2: параллельное объединение ветвей. Рассмотрим оператор

$$\boldsymbol{\Psi} : \mathrm{S} \to \mathrm{P}^N, \qquad \boldsymbol{\Psi}(s) = \big(\Psi_1(s), \Psi_2(s), \dots, \Psi_N(s)\big),$$

снабдив пространство P^N евклидовой нормой (3). Применяя Лемму (2) с $\mathrm{X} = \mathrm{S}$, $\mathrm{Y}_i = \mathrm{P}$, $F_i = \Psi_i$ и константами $L_i = \Lambda_i$, получаем, что $\boldsymbol{\Psi}$ является липшицевым отображением и

$$\mathrm{Lip}(\boldsymbol{\Psi}) \leq \Big(\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \big(L_{\text{LF},i} L_{\text{GCN},i} L_{\text{cls},i}\big)^2\Big)^{1/2}. \qquad (12)$$

Шаг 3: композиция с оператором извлечения скелета. Введём оператор

ISSN 3030-3907

$$\mathbf{\Theta}: \mathrm{V} \to \mathrm{P}^{N}, \qquad \mathbf{\Theta} := \mathbf{\Psi} \circ \Phi_{\text{skel}}.$$

По условию (1) теоремы оператор Φ_{skel} является липшицевым с константой L_{skel}, а по шагу 2 оператор $\mathbf{\Psi}$ является липшицевым с константой, ограниченной величиной из (12). Согласно Лемме 1 (применённой к композиции $\mathbf{\Psi} \circ \Phi_{\text{skel}}$ с $\mathrm{X}_0 = \mathrm{V}$, $\mathrm{X}_1 = \mathrm{S}$, $\mathrm{X}_2 = \mathrm{P}^{N}$), оператор $\mathbf{\Theta}$ является липшицевым и

$$\mathrm{Lip}(\mathbf{\Theta}) \leq L_{\text{skel}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{N} \big(L_{\mathrm{LF},i} L_{\mathrm{GCN},i} L_{\mathrm{cls},i} \big)^2 \Big)^{1/2}. \qquad (13)$$

Шаг 4: ансамблевое объединение. Окончательный оператор представляется в виде

$$\Phi = \Phi_{\text{ens}} \circ \mathbf{\Theta} : \mathrm{V} \to \mathrm{P}.$$

По условию (5) теоремы оператор $\Phi_{\text{ens}} : \mathrm{P}^{N} \to \mathrm{P}$ является липшицевым (относительно нормы $\|\cdot\|_{2,\mathrm{P}^{N}}$ на P^{N} и евклидовой нормы на P) с константой L_{ens}. Подчеркнём, что выбор именно евклидовой нормы на P^{N} в условии (5) согласован с нормой, использованной на шаге 2; это обеспечивает корректность применения Леммы 1 в следующем переходе.

Применяя Лемму 1 к композиции $\Phi_{\text{ens}} \circ \mathbf{\Theta}$ (с $\mathrm{X}_0 = \mathrm{V}$, $\mathrm{X}_1 = \mathrm{P}^{N}$, $\mathrm{X}_2 = \mathrm{P}$, $F = \mathbf{\Theta}$ и $G = \Phi_{\text{ens}}$) и пользуясь оценкой (13), получаем

$$\mathrm{Lip}(\Phi) \leq L_{\text{ens}} \cdot \mathrm{Lip}(\mathbf{\Theta}) \leq L_{\text{ens}} \cdot L_{\text{skel}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{N} \big(L_{\mathrm{LF},i} L_{\mathrm{GCN},i} L_{\mathrm{cls},i} \big)^2 \Big)^{1/2},$$

что в точности совпадает с заявленной оценкой (9).

Случай равных констант. Пусть $L_{\mathrm{LF},i} = L_{\mathrm{LF}}$, $L_{\mathrm{GCN},i} = L_{\mathrm{GCN}}$ и $L_{\mathrm{cls},i} = L_{\mathrm{cls}}$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Тогда $\Lambda_i = L_{\mathrm{LF}} L_{\mathrm{GCN}} L_{\mathrm{cls}}$ при всех i, и сумма в (9) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i^2 = N \big(L_{\mathrm{LF}} L_{\mathrm{GCN}} L_{\mathrm{cls}} \big)^2.$$

Извлекая квадратный корень и подставляя в (9), получаем (10).

Наконец, корректность определения оператора Φ следует из того, что каждое отображение в цепочке (2) является липшицевым и, в частности, корректно определено как функция на всей области определения; все переходы и подстановки согласованы с построенными пространствами. Это завершает доказательство теоремы.

Следствие. В условиях Теоремы 1 для любых двух видеопоследовательностей $v, v' \in \mathrm{V}$ справедливо неравенство

$$\big\| \Phi(v) - \Phi(v') \big\|_{\mathrm{P}} \leq L_{\Phi} \big\| v - v' \big\|_{\mathrm{V}},$$

ISSN 3030-3907

где L_{Φ} обозначает правую часть (9). В частности, если входное возмущение мало по норме, $\left\| v - v' \right\|_{V} < \varepsilon$, то отклонение выходного вектора вероятностей удовлетворяет оценке

$$\left\| \Phi(v) - \Phi(v') \right\|_{P} < L_{\Phi}\varepsilon .$$

Замечание 1. Полученное следствие 1 имеет прямое прикладное значение. Оно показывает, что система LFHAR обладает количественной гарантией устойчивости: при малых ошибках оценки позы или при квантовании координат суставов отклик системы не может измениться более чем на $L_{\Phi}\varepsilon$. Это, в свою очередь, ограничивает вероятность того, что малое возмущение входа приведёт к изменению класса с максимальной вероятностью, при условии, что разница между двумя наибольшими компонентами вектора $\Phi(v)$ превосходит $2L_{\Phi}\varepsilon$.

Замечание 4 (Альтернативная норма на P^{N}). Если в условии (5) Теоремы 1 заменить евклидову норму на P^{N} на max-норму (7), то на шаге 2 доказательства следует применить не Лемму 2, а Лемму 3. В этом случае оценка (9) заменяется на

$$\mathrm{Lip}(\Phi)_{,,} \; L_{\mathrm{ens}} \cdot L_{\mathrm{skel}} \cdot \max_{1_{,,}\, i_{,,}\, N} \left(L_{\mathrm{LF},i} L_{\mathrm{GCN},i} L_{\mathrm{cls},i} \right).$$

Согласно Замечанию 2, эта оценка не превосходит (9), и в случае равных констант обе оценки отличаются множителем $\sqrt{N}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В настоящей работе предложен математически строгий анализ устойчивости композиционного оператора LFHAR, реализующего распознавание действий человека по скелетным данным. Доказаны три леммы о свойстве Липшица для составных конструкций - последовательной композиции и двух вариантов параллельного объединения операторов (в евклидовой и max-нормах). На основе этих лемм сформулирована и доказана основная теорема, которая даёт явное выражение для константы Липшица всей системы и гарантирует количественную устойчивость модели к малым возмущениям входных видеоданных. Приведённый численный пример показывает, что для типовых значений констант компонентов модели общая константа Липшица остаётся в пределах, обеспечивающих практическую устойчивость алгоритма распознавания.

Полученные результаты создают теоретический фундамент для последующего исследования таких прикладных вопросов, как сертифицируемая робастность модели относительно состязательных возмущений, оценка надёжности распознавания при шуме оценки позы, а также построение алгоритмических методов контроля над константами

ISSN 3030-3907

Липшица отдельных компонентов нейросетевой архитектуры. Дальнейшее развитие предложенного подхода может включать переход от равномерных липшицевых оценок к локальным, учитывающим распределение реальных входных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУР

1. Yan S., Xiong Y., Lin D.} Spatial Temporal Graph Convolutional Networks for Skeleton-Based Action Recognition~// Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2018. Vol.~32, No.~1. P.~7444--7452. arXiv:1801.07455. DOI: 10.1609/aaai.v32i1.12328.
2. Chen Y., Zhang Z., Yuan C., Li B., Deng Y., Hu W.} Channel-wise Topology Refinement Graph Convolution for Skeleton-Based Action Recognition~// Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV) 2021 P.~13359--13368 arXiv:2107.12213 DOI: 10.1109/ICCV48922.2021.01311.
3. Chi H.-G., Ha M. H., Chi S., Lee S. W., Huang Q., Ramani K.} InfoGCN: Representation Learning for Human Skeleton-Based Action Recognition~// Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2022 P.~20186--20196 DOI: 10.1109/CVPR52688.2022.01955.
4. Lee J., Lee M., Lee D., Lee S.} Hierarchically Decomposed Graph Convolutional Networks for Skeleton-Based Action Recognition~// Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV) 2023 P.~10444--10453 arXiv:2208.10741 DOI: 10.1109/ICCV51070.2023.00958.
5. Zhou Y., Yan X., Cheng Z.-Q., Yan Y., Dai Q., Hua X.-S.} BlockGCN: Redefine Topology Awareness for Skeleton-Based Action Recognition~// Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2024 P.~2049--2058 DOI: 10.1109/CVPR52733.2024.00200.
6. Virmaux A., Scaman K.} Lipschitz regularity of deep neural networks: analysis and efficient estimation~// Advances in Neural Information Processing Systems 2018 Vol.~31 P.~3839--3848 arXiv:1805.10965.
7. Fazlyab M., Robey A., Hassani H., Morari M., Pappas G. J.} Efficient and Accurate Estimation of Lipschitz Constants for Deep Neural Networks~// Advances in Neural Information Processing Systems 2019 Vol.~32 P.~11427--11438 arXiv:1906.04893.
8. Combettes P. L., Pesquet J.-C.} Lipschitz Certificates for Layered Network Structures Driven by Averaged Activation Operators~// SIAM Journal on Mathematics of Data Science 2020 Vol.~2, No.~2 P.~529--557 arXiv:1903.01014 DOI: 10.1137/19M1272780.

ISSN 3030-3907

9. Araujo A., Havens A. J., Delattre B., Allauzen A., Hu B.} A Unified Algebraic Perspective on Lipschitz Neural Networks~// International Conference on Learning Representations (ICLR) 2023 arXiv:2303.03169 OpenReview ID: k71IGLC8cfc.
10. Tsuzuku Y., Sato I., Sugiyama M.} Lipschitz-Margin Training: Scalable Certification of Perturbation Invariance for Deep Neural Networks~// Advances in Neural Information Processing Systems 2018 Vol.~31 P.~6542--6551 arXiv:1802.04034.
11. Gama F., Bruna J., Ribeiro A.} Stability Properties of Graph Neural Networks~// IEEE Transactions on Signal Processing 2020 Vol.~68 P.~5680--5695 arXiv:1905.04497 DOI: 10.1109/TSP.2020.3026980.
12. Kenlay H., Thanou D., Dong X.} Interpretable Stability Bounds for Spectral Graph Filters~// Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning (ICML) PMLR 2021 Vol.~139 P.~5388--5397 arXiv:2102.09587.
13. Xu Y., Zhang J., Zhang Q., Tao D.} ViTPose: Simple Vision Transformer Baselines for Human Pose Estimation~// Advances in Neural Information Processing Systems 2022 Vol.~35 arXiv:2204.12484.
14. Kim H., Papamakarios G., Mnih A.} The Lipschitz Constant of Self-Attention~// Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning (ICML) PMLR 2021 Vol.~139 P.~5562--5571 arXiv:2006.04710.