ISNN 3030-3907

2026
JUNE
ISSUE - 6
VOLUME -3

DEVELOPMENT OF SCIENCE

scientific journal



Development of science

Ilmiy jurnal

IYUN 2026
Issue - 6, VOLUME – 3

ISSN 3030 -3907

Ilmiy jurnal OAK rayosatining 2024 yil 27 sentabrdagi 361-son qaroriga asosan 02.00.00 kimyo fanlari hamda 2025 yil 12 fevral 367- son qaroriga asosan 05.00.00 texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) va fan doktori (DSc) ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari yuzasidan dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR:
Temirov Alisher Hoshim o‘g‘li – texnika fanlari falsafa doktori (PhD),Dotsent.
TAHRIRIYAT KENGASH RAISI:
Fozilov Sadriddin Fayzullayevich – texnika fanlari doktori, professor
TAHRIRIYAT KENGASH A’ZOLARI

TEXNIKA FANLARI/ TECHNICAL SCIENCES/ ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Bozorov G‘ayrat Rashidovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Abdurahmonov Olim Rustamovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Adizov Bobur Zamirovich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Umumiy va noorganik kimyo instituti, professor
Hayitov Ruslan Rustamjonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Jumayev Qayum Karimovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Berdiyev Dorob Murodovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor
Maxmudov Rafiq Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Tilloyev Lochin Ismatilloyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Raxmonov Qahramon Sanakulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Barakayev Nusratullo Rajabovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor.
Jo‘rayev Xayrullo Fayziyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Panoyev Erali Rajabboyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Ataullayev Sherzod Nabiullyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Malik Negmurodovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Axmedova Ozoda Bahronovna
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti.
Safarov Bahri Jumayevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Xaydarov Axtam Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Safarov Jasur Alijon o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

KIMYO FANLARI/ CHEMICAL SCIENCES/ ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Axmedov Voxid Nizomovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Umarov Baqo Bafoyevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Kodirov Abduaxad Abduraximovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Qurbonov Mingniqul Jumagulovich
Qarshi davlat Universiteti, dotsent
Turemuratov Sharibay Naurizbaevich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Qoraqalpog‘iston bo‘limi Bosh ilmiy kotibi, professor
Tursunov Kaxor Shonazarovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Do‘stov Hamro
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Panoyev Nodir Shavkatovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Olimov Bobur Bahodir o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Kasimov Sherzod Abduazimovich
Termiz Davlat Universiteti, professor.
Aliqulov Rustam Valiyevich
Termiz Davlat Universiteti, professor
Tropov Xamza Tursunovich
Samarqand Davlat Universiteti, professor

IQTISODIYOT FANLARI/ ECONOMICS/ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Nizamov Aslitdin Badreddinovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Boboyev Akmal Choriyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Ergashxojayeva Shaxnoza Djasurovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Saidaxmedova Nodira Ilxomovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Muxsinov Bekzod Toxirovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shakarov Qulmat Ashirovich
Renessans ta'lim universiteti,dotsent.
Jumaeva Zulfiya Qayumovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Norova Salomat Yusupovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Avezova Shaxnoza Maxmudjonovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Jalilov Jamshid G‘anijonovich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, dotsent
Xasanova Gulruh Djumanazarovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

PEDAGOGIKA FANLARI/ PEDAGOGICAL SCIENCES / ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Siddiqova Sadoqat G‘afforovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Zoyirov Erkin Xalilovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, DSc, professor
Gaffarov Feruz Hasanovich
Puchon Universiteti, *professor*
Ruziyev Davron Yuldashevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Muradova Firuza Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Yunusova Gulandon Samiyevna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
To‘xtayeva Zebo Sharifovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Navro‘zova Gulchixra Nigmatovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Uzoqova Laylo Polvonovna
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.
To‘raqulova Marjona Qiyom qizi
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Muradova Zarina Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Sanjar Aslonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shodiyev Jahongir Jo‘raqulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent
Gaffarov Laziz Hasanovich
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.

Tahririyat a’zolarning to‘liq ro‘yxati jurnalning www.devos.uz saytida keltirilgan.

Tahririyat hay’ati a’zolarining tarkibini o‘zgartirish hamda qo‘shimcha kiritish yoki tahririyat a’zoligidan chiqarish bosh muharrir tomonidan amalga oshiriladi.

ISSN 3030-3907

Development of science ilmiy jurnali 2024 yil 15 aprel kuni №256445 sonli guvohnoma bilan Davlat ro‘yxatidan o‘tgan.

To‘plam elektron ko‘rinishda (pdf formatida) mualliflarga taqdim etiladi. To‘plamga kiritiladigan maqolalarning mazmuni, ulardagi statistik ma’lumotlar va me’yoriy hujjatlarning to‘g‘riligiga hamda har qanday fikr - mulohazalarga mualliflarning o‘zlari mas’ul hisoblanadilar. Talablarga javob bermaydigan maqolalar to‘plamga kiritilmaydi. Tashkiliy qo‘mita maqola matnini qisqartirish, qisman tuzatish kiritish, seksiyalarga joylashtirish huquqiga ega.

ISSN 3030-3907

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА СОКРАЩЕНИЯ ПЛЕЧА ОТКАТКИ ВСКРЫШНЫХ ПОРОД С ПОДВИЖНОЙ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ И ЕЁ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПОНТРЯГИНА

Каримов Шерзод Вафо угли
Начальник сектора научных исследований, инноваций и подготовки научно-педагогических кадров Филиала НИТУ «МИСИС» в г. Алмалык.
E-mail: karimov20-13@mail.ru

Аннотация. Задача поэтапного сокращения плеча откатки вскрышных пород на глубоком карьере при наличии подвижной нижней границы по условию устойчивости борта формализована как вариационная задача оптимального управления с фазовым ограничением. В функционале дисконтированных эксплуатационных затрат произведено принципиальное методическое разделение трёх величин: годового числа рейсов R_y, определяемого планом добычи и не зависящего от плеча; годовой производительности одного самосвала μ(L), зависящей от плеча через время цикла; и потребного парка $N_{rel(L)} = \frac{R_y}{\mu(L)}$. Это разделение устраняет ранее имевшуюся в литературе неоднозначность вида $\gamma_1 \cdot Q \cdot \mu$. Получено уравнение Эйлера–Лагранжа для дисконтированного функционала, содержащее дополнительный член $2r\gamma_3 \cdot L'$ от дифференцирования экспоненциального дисконт-множителя. Доказана его эквивалентность принципу максимума Понтрягина в минимизационной формулировке с гамильтонианом текущей стоимости $H_c = f + \psi \cdot u$, условием оптимальности $u = -\psi/(2\gamma_3)$ и согласованным вхождением ставки дисконтирования. На активной ветви фазового ограничения $L(t) \geq L_{\min(t)}$ применены условия Каруша–Куна–Таккера с множителем-функцией $\lambda(t) \geq 0$ и условием дополняющей нежёсткости; множитель λ(t) интерпретирован как теневая цена устойчивости борта. Численное решение двухточечной краевой задачи для карьера Кальмакыр на горизонте 2025–2032 дало двухфазную оптимальную траекторию: переходный участок (4,50 → 1,93 км за два года) и стационарную ветвь, отслеживающую медленно растущую границу 1,909 → 1,959 км; снижение парка с 60 до 57 самосвалов лимитируется не плечом, а пропускной способностью погрузочного оборудования по модели M/M/c.

Ключевые слова: вариационная задача; оптимальное управление; принцип максимума Понтрягина; фазовое ограничение; условия ККТ; теневая цена; плечо откатки; глубокий карьер; M/M/c.

Abstract. The problem of staged reduction of the overburden haul distance in a deep open-pit mine, with a moving lower boundary imposed by the wall-stability condition, is formalized as a state-constrained optimal-control problem. A

principled separation of three quantities is introduced in the discounted operating-cost functional: the production-determined annual number of trips R_y (L-independent), the per-truck annual productivity μ(L) and the required fleet $N_{rel(L)} = \frac{R_y}{\mu(L)}$; this removes the previously common $\gamma_1 \cdot Q \cdot \mu$ ambiguity. The Euler–Lagrange equation for the discounted functional is derived, with the additional term $2r\gamma_3 \cdot L'$ from differentiating the exponential discount factor; its equivalence to the Pontryagin maximum principle in minimization current-value form with $H_c = f + \psi \cdot u$, $u = -\psi/(2\gamma_3)$ and a consistent appearance of the discount rate r is proved. On the active branch of the path constraint $L(t) \geq L_{\min(t)}$, Karush–Kuhn–Tucker conditions with a multiplier function $\lambda(t) \geq 0$ and complementary slackness are applied; λ(t) is interpreted as the shadow price of wall stability. The two-point boundary-value problem is solved numerically for the Kalmakyr pit, 2025–2032, yielding a two-phase trajectory: a transient (4.50 → 1.93 km in two years) and a stationary branch tracking the slowly rising boundary 1.909 → 1.959 km; the modest fleet reduction from 60 to 57 trucks is bounded by the M/M/c shovel queue, not by the haul distance.

Keywords: variational problem; optimal control; Pontryagin maximum principle; state constraint; KKT conditions; shadow price; haul distance; deep open pit; M/M/c.

Annotatsiya. Chuqur karyerda bort barqarorligi sharti bo‘yicha harakatlanuvchi quyi chegara mavjud bo‘lgan sharoitda qoplama jinslarni tashish masofasini bosqichma-bosqich qisqartirish masalasi fazaviy cheklovli optimal boshqaruvning variatsion masalasi sifatida formalashtirilgan. Diskontlangan ekspluatatsion xarajatlar funksionalida uchta miqdor - qazib olish rejasi bilan belgilanadigan va tashish masofasiga bog‘liq bo‘lmagan yillik reyslar soni R_y, tashish masofasi orqali sikl vaqtiga bog‘liq bo‘lgan bitta avtosamosvalning yillik unumdorligi μ(L) va zarur park $N_{rel(L)} = \frac{R_y}{\mu(L)}$ - uslubiy jihatdan ajratilgan. Bu $\gamma_1 \cdot Q \cdot \mu$ ko‘rinishidagi noaniqlikni bartaraf etadi. Diskont ko‘paytuvchisini differensiallashdan kelib chiqadigan $2r\gamma_3 \cdot L'$ qo‘shimcha hadini o‘z ichiga olgan Eyler–Lagrange tenglamasi olingan. U joriy qiymatdagi minimallashtirish shaklidagi Pontryagin maksimum prinsipi bilan ekvivalentligi ko‘rsatilgan. Faol fazaviy cheklov $L(t) \geq L_{\min(t)}$ tarmog‘ida KKT shartlari qo‘llanib, λ(t) ko‘paytuvchisi karyer borti barqarorligining soya narxi sifatida talqin qilingan. Kalmokir karyeri uchun 2025–2032 yillar oralig‘idagi hisoblash ikki bosqichli optimal trayektoriyani berdi: ikki yillik o‘tish uchastkasi (4,50 → 1,93 km) va 1,909 → 1,959 km chegarani kuzatuvchi statsionar tarmoq; parkning 60 dan 57

ISSN 3030-3907

avtosamosvalgacha kamayishi tashish masofasi bilan emas, balki M/M/c modeli bo‘yicha yuklash uskunasining o‘tkazish qobiliyati bilan cheklanadi.

Kalit so‘zlar: variatsion masala; optimal boshqaruv; Pontryagin maksimum prinsipi; fazaviy cheklov; KKT shartlari; soya narx; tashish masofasi; chuqur karyer; M/M/c.

ВВЕДЕНИЕ.

Поэтапное сокращение плеча откатки вскрышных пород на глубоком карьере представляет собой задачу динамической оптимизации: на каждом шаге планирования принимается решение об изменении расстояния транспортировки L(t), а суммарные приведённые затраты должны быть минимизированы на конечном горизонте при выполнении физических, технических и геомеханических ограничений. Принципиальная особенность задачи в условиях глубокого карьера - подвижность нижней границы плеча: с углублением карьера высота борта растёт, что увеличивает минимально допустимый по условию устойчивости отступ отвала s_min, а вместе с ним и минимально достижимое плечо $L_{\min(t)} = L_{\text{ГДПО}(t)}$. Геомеханическое обоснование $L_{\text{ГДПО}}$ для карьера Кальмакыр и закон роста подвижной границы получены в [1] ($\frac{\partial L_{min}}{\partial t} \approx$ 0,0072 км/год).

В литературе по планированию открытых горных работ применяют преимущественно дискретно-целочисленные постановки [2–4], в которых горизонт планирования разбивается на дискретные периоды, а решения принимаются для каждого периода независимо. Такой подход хорошо отражает реальные технологические ограничения, но не позволяет получить аналитической характеристики оптимальной траектории L*(t) и не учитывает естественной непрерывности процесса перемещения отвала. Вариационные методы и принцип максимума Понтрягина в этих задачах применяются редко [5].

Цель работы - формализовать задачу поэтапного сокращения плеча откатки как непрерывную вариационную задачу с подвижной нижней границей по условию устойчивости, провести вывод уравнения Эйлера–Лагранжа с явным разделением годового числа рейсов и посамосвалочной производительности, доказать его эквивалентность принципу максимума Понтрягина в согласованной по знакам форме, ввести условия Каруша–Куна–Таккера на активной ветви фазового ограничения и численно построить оптимальную траекторию для условий карьера Кальмакыр на горизонте 2025–2032.

ISSN 3030-3907

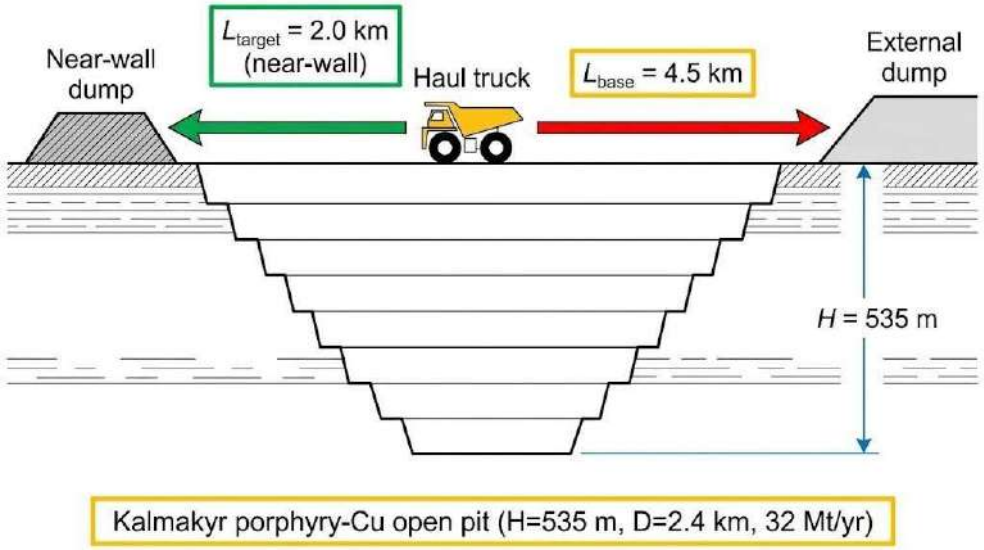


Рис. 1. Концептуальная схема: переход от внешнего отвалообразования (L_{base} = 4,5 км) к прибортовому (L_{target} = 2,0 км) на карьере Кальмакыр ограничен снизу подвижной геомеханической границей $L_{min(t)} = L_{ГДПО(t)}$

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Разделение производственных и L-зависимых величин

Пусть L(t) - среднее плечо откатки вскрышных пород в момент $t \in [t_0, t_f]$ (километры), $L_{\min(t)}$ - нижняя граница плеча по условию устойчивости борта (неубывающая монотонная функция времени [1]). Принципиальное методическое разделение: годовое число рейсов вскрыши, требуемое планом добычи,

$$R_y = \frac{V_{year}}{q_{eff}}, \frac{\text{рейсов}}{\text{год}} \quad (1)$$

где V_{year} - годовой объём вскрыши и q_{eff} - фактическая средняя масса груза за рейс по парку, является L-независимой производственной постоянной: один и тот же объём породы должен быть перевезён независимо от расположения отвала. Через время цикла самосвала плечо влияет только на две другие, чётко отделённые величины - годовую производительность одного самосвала μ(L) и потребный парк $N_{rel(L)}$:

$$\mu(L) = K_a \cdot \frac{T_{cal}}{T_{c(L)}} \ \frac{\text{рейс}}{\text{самосв} \cdot \text{год}}, \qquad N_{rel(L)} = \frac{R_y}{\mu(L)} \quad (2)$$

где K_a - коэффициент технической готовности парка (≈ 0,75 для глубоких карьеров), T_{cal} - календарный фонд рабочего времени (мин/год), $T_{c(L)}$ - фактическое время цикла одного самосвала

ISSN 3030-3907

$$T_{c(L)} = t_l + t_d + t_m + 60 \cdot \frac{L}{v_{load}} + 60 \cdot \frac{L}{v_{empty}} + t_{q(L)}[\text{мин}], \quad (3)$$

t_l, t_d, t_m - L-независимые длительности погрузки, разгрузки и манёвров (мин), 60L/v - этапы движения с грузом и порожнего движения (мин при L в км и v в км/ч), $t_{q(L)}$ - среднее время ожидания у экскаватора. Загрузка моделируется как M/M/c очередь с с параллельными экскаваторами: при λ = (число активных самосвалов в обороте)/T_c (рейс/мин на экскаватор), $\mu_s = \frac{1}{t_l}$ (рейс/мин на один экскаватор), нагрузка $a = \frac{\lambda}{\mu_s}$ и коэффициент использования экскаваторов $\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu_s} < 1$. Вероятность того, что прибывающий самосвал должен ожидать, даётся формулой Эрланга-С:

$$P_W = C(c,a) = \frac{\left[\frac{a^c}{c! \cdot (1-\rho)}\right]}{\left[\frac{\sum_{\{k=0\}}^{\{c-1\}} a^k}{k!} + \frac{a^c}{c! \cdot (1-\rho)}\right]}, \qquad t_q = \frac{P_W}{(c \cdot \mu_s - \lambda)}. \quad (4)$$

Дисконтированный функционал затрат

Дисконтированный функционал суммарных эксплуатационных затрат на горизонте [t₀, t_f] записывается в виде

$$J[L] = \int_{\{t^0\}}^{\{t_f\}} e^{\{-r(t-t^0)\}} \cdot \left[\gamma^1 \cdot R_y \cdot Q_{\text{рейс}(L)} + \gamma^2 \cdot N_{rel(L)} + \gamma^3 \cdot (L')^2\right] dt \quad (5)$$

где r - непрерывная ставка дисконтирования (год⁻¹), $Q_{\text{рейс}(L)} = \alpha + \beta \cdot L$ - расход топлива на один рейс по модели работы [6], γ₁ - цена дизельного топлива (USD/л), γ₂ - годовая стоимость владения одним самосвалом (USD/(самосвал·год)), γ₃ - штраф за интенсивность технологической реконфигурации (USD·год/км²). Каждое слагаемое подынтегрального выражения имеет размерность USD/год: $\gamma_1 \cdot R_y \cdot Q_{\text{рейс}}$ = (USD/л)·(рейс/год)·(л/рейс) = USD/год; $\gamma_2 \cdot N_{rel}$ = (USD/(самосв·год))·(самосвалов) = USD/год; γ₃·(L′)² при L′ в км/год = (USD·год/км²)·(км²/год²) = USD/год. После интегрирования по времени в годах J получается в USD. Размерная согласованность обеспечивается отделением R_y (производственная постоянная) от μ(L) (посамосвалочная производительность); в традиционной формулировке вида γ₁·Q·μ функционал имеет per-truck смысл, а $N_{rel} - fleet$, что приводит к смешению размерностей и неоднозначности.

ISSN 3030-3907

Уравнение Эйлера–Лагранжа для дисконтированного функционала

Пусть $F(L, L') = \gamma^1 \cdot R_y \cdot Q(L) + \gamma^2 \cdot N_{rel(L)} + \gamma^3 \cdot (L')^2$. Дважды непрерывно дифференцируемая экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа дисконтированного функционала

$$\frac{\partial\left(e^{\{-r\tau\}} \cdot F\right)}{\partial L} - \left(\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{\partial\left(e^{\{-r\tau\}} \cdot F\right)}{\partial L'}\right] = 0, \qquad \tau = t - t^0. \tag{6}$$

Поскольку R_y не зависит от L, топливный член даёт единственную производную $\gamma_1 \cdot R_y \cdot Q'(L)$ (без необходимости применения правила Лейбница к произведению $Q \cdot \mu$ - этим обеспечивается однозначность интерпретации). Вычисляя частные производные и деля на общий множитель $e^{\{-r\tau\}} > 0$, получаем дисконтированное уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\gamma^1 \cdot R_y \cdot Q'(L) + \gamma^2 \cdot N'_{rel}(L) - 2\gamma^3 \cdot L'' + 2r \cdot \gamma^3 \cdot L' = 0. \tag{7}$$

Дополнительное слагаемое $2r\gamma_3 \cdot L'$ возникает из дифференцирования экспоненциального дисконт-множителя; при r = 0 уравнение (7) переходит в классическую недисконтированную форму.

Принцип максимума Понтрягина в минимизационной форме

Введём состояние x = L и управление u = L′ с динамикой $\dot{x} = u$ и функцию текущих затрат $f(x, u) = \gamma^1 \cdot R_y \cdot Q(x) + \gamma^2 \cdot N_{rel(x)} + \gamma^3 \cdot u^2$. Для задачи минимизации принимаем гамильтониан текущей стоимости в минимизационной форме

$$H_c = f(x, u) + \psi \cdot u, \tag{8}$$

где ψ - сопряжённая переменная текущей стоимости. Необходимые условия принципа максимума Понтрягина в текущей стоимости имеют вид дисконтированного сопряжённого уравнения и условия оптимальности по управлению

$$\psi\pm = r \cdot \psi - \frac{\partial H_c}{\partial x} = r \cdot \psi - \left[\gamma^1 \cdot R_y \cdot Q' + \gamma^2 \cdot N'_{rel}\right], \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2\gamma^3 \cdot u + \psi = 0 \Rightarrow u = -\frac{\psi}{2\gamma^3}. \tag{10}$$

Знак в (10) - ключевой момент: при минимизационном гамильтониане $H_c = f + \psi \cdot u$ условие оптимальности даёт $u = -\psi/(2\gamma_3)$, а не $u = +\psi/(2\gamma_3)$ (последнее соответствовало бы максимизационной форме $H_c = \psi \cdot u - f$, при которой неверно интерпретируется задача минимизации).

Доказательство эквивалентности (7) и (8)–(10)

ISSN 3030-3907

Из (10) следует $\psi = -2\gamma_3 \cdot u = -2\gamma_3 \cdot L'$, поэтому $\psi\tilde{n} = -2\gamma_3 \cdot L''$. Подстановка в сопряжённое уравнение (9):

$$-2\gamma_3 \cdot L'' = r \cdot (-2\gamma_3 \cdot L') - [\gamma_1 \cdot R_y \cdot Q' + \gamma_2 \cdot N_rel'], \quad (11)$$

Умножение (11) на (−1) и перегруппировка даёт $2\gamma_3 \cdot L'' = 2r \cdot \gamma_3 \cdot L' + \gamma_1 \cdot R_y \cdot Q' + \gamma_2 \cdot N_rel'$, или

$$\gamma_1 \cdot R_y \cdot Q' + \gamma_2 \cdot N_rel' - 2\gamma_3 \cdot L'' + 2r \cdot \gamma_3 \cdot L' = 0, \quad (12)$$

что тождественно совпадает с уравнением Эйлера–Лагранжа (7). Вариационная и понтрягинская формулировки эквивалентны на внутренней области допустимого множества, со согласованным вхождением ставки дисконтирования r. Условие Лежандра $\partial ZF/\partial L'^2 = 2\gamma_3 > 0$ выполнено; экстремаль является слабым минимумом. Условие трансверсальности на правом свободном конце $e^{\{-r\tau\}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial L'}\right)|_{\{t_f\}} = 0$ совместно с начальным условием $L(t_0) = L_0$ замыкают двухточечную краевую задачу.

Условия Каруша–Куна–Таккера на фазовом ограничении

Основная особенность рассматриваемой задачи в том, что оптимум на длительной части горизонта прижимается к подвижной нижней границе $L_{\min(t)}$, то есть фазовое ограничение $L(t) - L_{\min(t)} \geq 0$ становится активным; в этой зоне внутренних условий (7)–(10) недостаточно. Ограничение присоединяется к функционалу через множитель-функцию Каруша–Куна–Таккера $\lambda(t) \geq 0$. Расширенный гамильтониан текущей стоимости

$$H\ddot{A} = f(x,u) + \psi \cdot u - \lambda(t) \cdot [x - L_{\min(t)}], \quad (13)$$

первый порядок необходимых условий - модифицированное дисконтированное сопряжённое уравнение и условия знака и дополняющей нежёсткости

$$\psi\pm = r \cdot \psi - \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda(t), \quad \lambda(t) \geq 0, \quad x - L_{\min(t)} \geq 0, \quad \lambda(t) \cdot [x - L_{\min(t)}] = 0. \quad (14)$$

Два режима следуют непосредственно из (14). На переходной (неактивной) ветви $\lambda(t) = 0$, и (14) сводится к внутреннему сопряжённому уравнению (9), а траектория определяется внутренним уравнением Эйлера–Лагранжа / Понтрягина. На активной ветви $L(t) = L_{\min(t)}$, траектория прижата к подвижной границе, а множитель $\lambda(t) = \partial f/\partial x - r \cdot \psi + \psi\tilde{n} \geq 0$ имеет смысл теневой цены устойчивости борта - предельных дополнительных затрат на единицу ослабления геомеханического ограничения.

РЕЗУЛЬТАТЫ.

Численный пример: Кальмакыр, 2025–2032

ISSN 3030-3907

Параметры численного решения для карьера Кальмакыр: горизонт планирования t ∈ [2025; 2032] (8 лет); начальное плечо $L(t_0)$ = 4,5 км; подвижная нижняя граница L_min(t), полученная по геомеханическому обоснованию [1] и растущая с 1,909 до 1,959 км со скоростью ≈ 0,0072 км/год; ставка дисконтирования r = 0,10 год$^{-1}$. Стоимостные коэффициенты: γ_1 = 0,72 USD/л; γ_2 = 320 тыс. USD/(самосвал·год) (амортизация плюс эксплуатация); коэффициент γ_3 калибруется так, чтобы переходный участок имел технологически разумную длительность порядка двух лет. Двухточечная краевая задача (7) с граничными условиями $L(t_0) = L_0$, $e^{\{-r\tau\}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial L'}\right)|_{\{t_f\}} = 0$ и фазовым ограничением (14) решается методом стрельбы с разделением на переходный и стационарный участки.

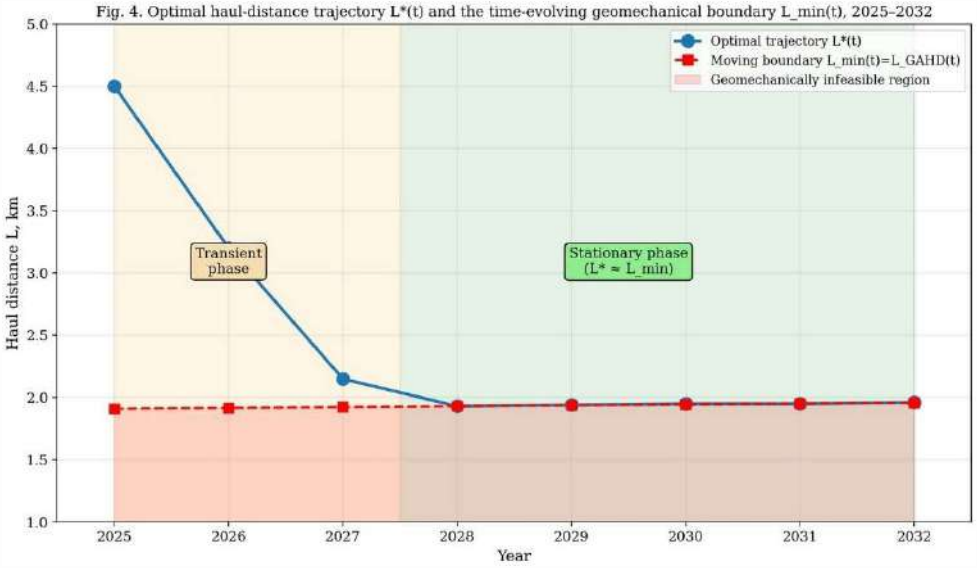


Рис. 2. Оптимальная траектория плеча откатки L*(t) и подвижная нижняя геомеханическая граница $L_{min(t)}$ для карьера Кальмакыр, 2025–2032 гг. После двухлетнего переходного участка траектория прижимается к границе и отслеживает её рост

Результат - двухфазная оптимальная траектория (рис. 1). На переходном участке (2025–2027) плечо быстро сокращается с 4,50 до 1,93 км. На стационарном участке (2028–2032) оптимум следует за подвижной границей L_min(t), растущей с 1,909 до 1,959 км; фазовое ограничение активно, множитель λ(t) > 0.

Технические показатели на оптимальной траектории: среднее за период значение расхода топлива на один рейс снижается с 84,8 до 42,0 л/рейс (на 50,4 %); требуемый парк самосвалов уменьшается с 60 до 57 единиц (на 5 %). Несимметричность этих относительных изменений объясняется структурой времени цикла (3): расход топлива определяется преимущественно L-зависимым слагаемым β·L, тогда как $T_{c(L)}$ содержит

ISSN 3030-3907

существенную L-независимую часть $t_l + t_d + t_m + t_{q(L)}$. С уменьшением плеча узким местом становится этап погрузки (модель M/M/c для очереди у экскаваторов): $t_{q(L)}$ умеренно растёт, что частично компенсирует сокращение времени движения. Парк лимитируется не плечом откатки, а пропускной способностью погрузочного оборудования.

ОБСУЖДЕНИЕ.

Принципиальное методическое преимущество предложенной непрерывной вариационной постановки перед стандартными дискретно-целочисленными моделями [2–4] - возможность аналитической характеризации оптимальной траектории и интерпретации множителя λ(t) как теневой цены геомеханического ограничения. Это даёт инструмент количественной оценки экономической ценности устойчивости борта: на стационарном участке λ(t) есть предельные дополнительные затраты на единицу снижения s_{min}то позволяет оценить, в каких пределах оправдано вложение в дополнительные геотехнические мероприятия (укрепление борта, дренаж, мониторинг) для уменьшения требуемого отступа s_{min}.

Активность фазового ограничения на длительной части горизонта (≥ 5 лет из 8) - ключевой структурный результат: оптимум определяется именно подвижной геомеханической границей, а не внутренними условиями вариационной задачи. Это означает, что упрощённые постановки со статической границей систематически переоценивают достижимое сокращение плеча откатки. Игнорирование подвижности границы $L_{\min(t)}$ приводит к экономически и геомеханически некорректным проектным решениям.

Принципиальное разделение R_y (производственная постоянная), μ(L) (посамосвалочная) и $N_{rel(L)} = \frac{R_y}{\mu(L)}$ в функционале (5) устраняет ранее имевшуюся в литературе неоднозначность вида $\gamma_1 \cdot Q \cdot \mu$, в которой смешивались per-truck и fleet-понятия. Это разделение делает функционал размерно строгим и обеспечивает корректную интерпретацию каждого слагаемого как доли годовых затрат соответствующей природы.

Развитие. Дисконтированный функционал (5) в текущей формулировке учитывает топливо, парк и реконфигурацию; износ шин и эксплуатационные ремонты, существенные для глубоких карьеров, могут быть включены через обобщённую переменную стоимость $C_{var(L)} = R_y \cdot \left[c_{fuel} \cdot Q_{\text{рейс}(L)} + c_{tyre(L)} + c_{maint(L)}\right]$ без структурного изменения вариационной задачи [7]. Также возможно расширение задачи на

ISSN 3030-3907

стохастическую границу $L_{\min(t;\,\omega)}$ с учётом неопределённости в параметрах геомеханической модели и переход к стохастической вариационной задаче.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Задача поэтапного сокращения плеча откатки вскрышных пород на глубоком карьере при подвижной нижней границе по условию устойчивости борта формализована как непрерывная вариационная задача оптимального управления с фазовым ограничением.

2. Введено принципиальное методическое разделение трёх величин в функционале затрат: годового числа рейсов R_y (L-независимая производственная постоянная), посамосвалочной производительности μ(L) и потребного парка $N_{rel(L)} = \frac{R_y}{\mu(L)}$; это разделение устраняет ранее имевшуюся в литературе неоднозначность вида $\gamma_1 \cdot Q \cdot \mu$.

3. Выведено дисконтированное уравнение Эйлера–Лагранжа $\gamma^1 \cdot R_y \cdot Q' + \gamma^2 \cdot N'_{rel} - 2\gamma^3 \cdot L'' + 2r \cdot \gamma^3 \cdot L' = 0$ (с дополнительным членом $2r \cdot \gamma_3 \cdot L'$ от дисконт-множителя) и доказана его эквивалентность минимизационной форме принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H_c = f + \psi \cdot u$, оптимальностью $u = -\psi/(2\gamma_3)$ и согласованным вхождением ставки дисконтирования.

4. На активной ветви фазового ограничения $L(t) - L_{\min(t)} \geq 0$ применены условия Каруша–Куна–Таккера с интерпретацией множителя $\lambda(t) \geq 0$ как теневой цены устойчивости борта.

5. Численное решение для карьера Кальмакыр на горизонте 2025–2032 дало двухфазную оптимальную траекторию: переходный участок 4,50 → 1,93 км за два года и стационарный участок, отслеживающий медленно растущую границу 1,909 → 1,959 км. Снижение парка с 60 до 57 самосвалов лимитируется не плечом откатки, а пропускной способностью погрузочного оборудования по модели M/M/c.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lin J., Asad M. W. A., Topal E. et al. A novel model for sustainable production scheduling of an open-pit mining complex considering waste encapsulation // Resources Policy. 2024. Vol. 91. Article 104940.

2. Paithankar A., Chatterjee S., Goodfellow R., Asad M. W. A. Simultaneous stochastic optimization of production sequence and dynamic cut-off grades in an open pit mining operation // Resources Policy. 2020. Vol. 66. Article 101634.

3. Production scheduling for strategic open pit mine planning: a mixed-integer programming approach // Operations Research. 2020. Vol. 68, No. 5. P. 1425–1443.

ISSN 3030-3907

4.Integrated optimization of production scheduling and haulage route planning in open-pit mines // Mathematics. 2024. Vol. 12, No. 13. Article 2070.
5.Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. - New York: Interscience, 1962. - 360 p.
6.Sethi S. P. Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics. - 3rd ed. - Cham: Springer, 2019. - 565 p.
7. Xu X., Gu X., Wang Q. et al. Enumeration optimization of open pit production scheduling based on mobile capacity search domain // Scientific Reports. 2023. Vol. 13. Article 91.
8. Optimization of ore production scheduling strategy using NSGA-II-GRA in open-pit mining // Scientific Reports. 2025. Vol. 15. Article 10287.
9. Kleinrock L. Queueing Systems, Volume 1: Theory. - New York: Wiley-Interscience, 1975. - 417 p.
10. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction. - Princeton: Princeton University Press, 2011. - 256 p.

ISSN 3030-3907