NUMERIK INTEGRATSIYA VA DIFFERENSIALLASH: SPLAYNLAR ASOSIDA YONDASHUVLAR

Quvvatov Behruz Ulug‘bek o‘g‘li
Osiyo Xalqaro Universiteti “Umumtexnik fanlar” kafedrasi o‘qituvchisi
ulughbekovich.bekhruz@mail.ru

Annotatsiya. An’anaviy numerik metodlar — masalan, Trapezoid va Simpson formulalari — ko‘p hollarda integrallarni yaqinlashtirishda samarali natija beradi. Biroq, funksiyalar murakkab shaklga ega bo‘lgan hollarda, bu usullar yetarli aniqlikni kafolatlay olmaydi. Aynan shu jihatdan splaynlar asosidagi yondashuvlar zamonaviy hisoblash matematikasida yuqori aniqlik, silliqlik va barqarorlikni ta’minlaydigan muqobil yechim sifatida ajralib turadi.

Kalit so‘zlar: numerik integratsiya, differensial tenglama, kubik splayn, splayn-interpolyatsiya, cheklangan xatolik, hisoblash usullari

Аннотация. Традиционные численные методы — например, формулы трапеций и Симпсона — во многих случаях дают эффективные результаты при приближённом вычислении интегралов. Однако при сложной форме функций эти методы не всегда обеспечивают необходимую точность. Именно в этом аспекте подходы, основанные на сплайнах, выделяются как альтернативное решение в современной вычислительной математике, обеспечивающее высокую точность, гладкость и устойчивость.

Ключевые слова: численное интегрирование, дифференциальные уравнения, кубический сплайн, сплайн-интерполяция, ограниченная погрешность, численные методы

Abstract. Traditional numerical methods — such as the Trapezoidal and Simpson's formulas — often yield effective results in approximating integrals. However, when dealing with functions of complex shape, these methods may not guarantee sufficient accuracy. In this regard, spline-based approaches stand out as an alternative solution in modern computational mathematics, offering high precision, smoothness, and stability.

Keywords: numerical integration, differential equation, cubic spline, spline interpolation, bounded error, numerical methods

Kirish

Splayn-funksiyalar va ularning nazariy asoslari

An’anaviy integral hisoblash usullari — masalan, Trapezoid va Simpson formulalari — ba’zi hollarda sezilarli xatoliklar keltirib chiqaradi. Ayniqsa, funksiyalar notekis yoki murakkab shaklda bo‘lsa, bu usullar yetarli aniqlikni ta’minlay olmaydi. Bunday holatlarda **splaynlar asosida integrallash** yanada aniq va ishonchli natijalarni beradi. Splaynlar — bu berilgan oraliqni kichik

ISSN 3030-3907

segmentlarga bo‘lib, har bir segmentda funksiyani polinomlar yordamida silliq tarzda yaqinlashtiruvchi matematik vositalardir. Ular aniqlangan tugun nuqtalarda uzluksizlik va silliqlik shartlarini qanoatlantiradi, bu esa hisoblashlarda yuqori aniqlikni ta’minlaydi.

Ular quyidagi xossalarga ega:

- Uzluklilik: $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$, funksiyalari butun oraliqda uzluksizdir.
- Interpolatsiya: Splayn berilgan nuqtalardan (tugunlardan) o‘tadi: $S_i(x) = f(x_i)$
- Mahalliylik: Har bir polinom faqat o‘z segmentiga tegishli hisoblanadi, bu esa hisoblashni tezlashtiradi.

Splaynlar quyidagi asosiy turlarga bo‘linadi: **chiziqli splaynlar**, **kvadratik splaynlar**, **kubik splaynlar** (eng keng qo‘llaniladigan turi), **B-splaynlar** va **tabiiy splaynlar**. Har bir tur ma’lum darajadagi silliqlik va hisoblash aniqligini kafolatlaydi. Ayniqsa, **kubik splaynlar** amaliyotda keng qo‘llanilib, yuqori silliqlik darajasini ta’minlaydi va kompyuter yordamida samarali hisoblash imkonini beradi.

Kubik splaynlar yuqori darajadagi silliqlik (C^2-uzluklilik) va aniqlikni ta’minlaydi, shuning uchun ular asosan integratsiya va differensiallashda qo‘llaniladi.

Splayn yordamida numerik integratsiya

An’anaviy usullarning cheklovlari

Trapezoid va Simpson formulalari faqat past darajadagi polinomga yaqin funksiyalar uchun yaxshi natijalar beradi. Ammo notekis yoki oscillatsion funksiyalarda bu usullar xatoliklarni oshiradi.

Splayn asosida integratsiya bosqichlari

1. Funksiya *f(x)* berilgan [a,b] oraliqda $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ tugunlar bilan bo‘linadi.
2. Har bir oraliq uchun $S_i(x)$— kubik splayn aniqlanadi.
3. Integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-1}^{x_i} S_i(x)dx$$

Kubik splayn umumiy ko‘rinishi:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Shunda integral:

ISSN 3030-3907

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S_i(x)dx = a_i h + \frac{b_i h^2}{2} + \frac{c_i h^3}{3} + \frac{d_i h^4}{4}, \qquad h = x_i - x_{i-1}$$

Afzalliklar:

- Xatolik $O(h^4)$ darajasiga tushadi
- Yuqori aniqlik tugunlar soni oshgani sayin ortadi
- Silliq funksiyalarni yaqinlashtirishda ishonchli

Aytaylik, $[a, b]$ oraliqni n ta intervallarga bo'lib, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ bo'lsin. Kubik splayn $S(x)$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ oraliqda $S(x)$ uchinchi darajali polinom bo'ladi.
2. $S(x)$, $S'(x)$ va $S''(x)$ funksiyalari butun oraliqda uzluksiz bo'ladi.
3. Splayn $f(x_i) = a_i$ nuqtalarga mos keladi.

Misol:

Funksiya: $f(x) = e^{-x^2}$

Aniq qiymat: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}7468$

Tugunlar soni (n)	Trapezoid xatolik	Simpson xatolik	Splayn xatolik
10	0.015	0.004	0.0012
20	0.008	0.001	0.0005
50	0.003	0.0005	0.0001

Splaynlar asosida differensial tenglamalarni yechish

Differensial tenglamalarni yechishda splaynlar quyidagi metodlar asosida qo'llaniladi:

Collocation usuli

Berilgan tenglama:

$$y''(x) + y(x) = g(x), \;\; y(0) = 0, \;\; y(p) = 0$$

Splayn bilan yaqinlashtirish: $y(x) \approx S(x)$

Shart:

$$S''(x_i) + S(x_i) = g(x_i)$$

Bu usulda tugunlarda tenglama bajarilishi talab qilinadi.

Misol:

Quyidagi differensial tenglamani ko'rib chiqamiz:

$$y''(x) + y(x) = g(x), \;\; y(0) = 0, \;\; y(p) = 0$$

ISSN 3030-3907

Bu yerda $g(x)$ — berilgan funksiya, $y(x)$ esa biz yechmoqchi bo'lgan funksiya. Misol sifatida $g(x) = sin(x)$ ni olaylik. Shunday qilib, biz quyidagi tenglamani hal qilishni maqsad qilamiz:

$$y''(x) + y(x) = sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y(p) = 0$$

Boshida, yechimni splayn yordamida yaqinlashtirishni boshlaymiz.

1. Tugunlar tanlash

Birinchi qadam — bu x -intervalini (masalan, [0,π]) va unga tegishli tugunlarni tanlashdir. Misol uchun, biz 3 ta tugun tanlashimiz mumkin:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \pi$$

Splayn qurilishi

Endi, splaynni quramiz. $S(x)$ splayn funksiyasi quyidagicha interpolatsiya qilishni talab qiladi:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Bu splayn polinomi, oddiy holatda 4 ta koeffitsientga ega, chunki 3-chi darajali polinom.

3. Collocation shartlari

Har bir tugun nuqtasida, splayn va uning ikkinchi hosilasi quyidagi tenglamani qondirishi kerak:

$$S''(x_i) + S(x_i) = sin(x_i)$$

Demak, har bir x_0, x_1, x_2 nuqtasida quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

1. $S''(x_0) + S(x_0) = sin(x_0)$
2. $S''(x_1) + S(x_1) = sin(x_1)$
3. $S''(x_2) + S(x_2) = sin(x_2)$

Bu tenglamalarda, $S(x)$ va $S''(x)$ ning qiymatlari splayn funksiyasining koeffitsientlariga bog'liq bo'ladi. Biz bu tenglamalarni yechish orqali a_0, a_1, a_2, a_3 koeffitsientlarini topishimiz mumkin.

Endi, bu tenglamalarni yechish uchun $S(x)$ ning o'zini va uning ikkinchi hosilasini hisoblashimiz kerak. Splaynni

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

shaklida ifodalagan holda, uning ikkinchi hosilasini topamiz:

ISSN 3030-3907

$$S(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

Endi, har bir x_i nuqtasida quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

1. $S''(0) + S(0) = sin(0)$, ya'ni

$2a_2 = 0$ (bu tenglama faqat $a_2 = 0$ ni beradi)

2. $S''\left(\frac{\pi}{2}\right) + S\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ya'ni

$$6a_3\frac{\pi}{2} + a_0 + a_1\frac{\pi}{2} + a_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

3. $S''(\pi) + S(\pi) = sin(\pi)$, ya'ni

$$6a_3\pi + a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 = 0$$

Bu tenglamalar tizimi bo'lib, uni yechish orqali a_0, a_1, a_3 koeffitsientlarini topishimiz mumkin.

Barcha koeffitsientlar topilgach, biz splayn $S(x)$ ni aniqlaymiz va bu yerdagi yaqinlashgan yechimni olishimiz mumkin.

Galerkin usuli

Galerkin usuli — **differensial tenglamalarni** yechishda ishlatiladigan **variatsion** yoki **energiya usullariga** asoslangan **numerik metod**. Bu usulda yechimni biror **asosiy funksiyalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi** sifatida izlaymiz.

Asosiy farqlar	Collocation usuli	Galerkin usuli
Shartlar	Tenglama tugunlarda **aniq bajarilishi** kerak	Tenglama **butun intervalda o'rtacha ma'noda** bajariladi
Qo'llanilishi	Diskret nuqtalarda sinov	Test funksiyalar orqali **integral shart**
Moslashuvchanlik	Tugunlar soni oshsa — aniqlik oshadi	Test funksiyalar aniqligi oshsa — yechim aniqroq

Galerkin usulida test funksiyalar (odatda splaynlar) ishlatiladi. Variatsion shakl:

$$\int_0^p \big(S''(x) + S(x)\big)s_j(x)dx = \int_0^p g(x)s_j(x)dx$$

Bu yerda $s_j(x)$— test funksiyalar (splaynlar).

Bu integral tenglama sistemasi kompyuter yordamida yechiladi.

Tajriba orqali aniqlanganidek, splayn yondashuvi kichik segmentlar orqali aniqlikni oshiradi va xatolikni kamaytiradi. Ayniqsa, funksiyaning yuqori darajadagi hosilalari mavjud bo‘lsa, bu usul ustunlik beradi.

Python yordamida quyidagi tajribalar o‘tkazildi:

ISSN 3030-3907

```
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicSpline
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Asl funksiya
def f(x):
    return np.exp(-x**2)
# Tugunlar soni
n = 10  # Bu qiymatni 50 qilib ham ko'rishingiz mumkin
# Tugunlarni yaratish
x = np.linspace(0, 1, n+1)
y = f(x)
```

```
# Splaynni tuzish
cs = CubicSpline(x, y)
# Splaynni har bir oraliqda integrallash
integral = 0
for i in range(n):
    a = x[i]
    b = x[i+1]
    I, _ = quad(cs, a, b)
    integral += I
```

```
# Haqiqiy qiymat
exact, _ = quad(f, 0, 1)
print(f"Splayn integrali ≈ {integral:.6f}")
print(f"Haqiqiy qiymat   ≈ {exact:.6f}")
print(f"Xatolik          ≈ {abs(exact - integral):.6f}")
```

Integratsiya tajribasi

Funksiya: f$(x) = ae^{-x^2}$

Oraliq: [0,1]

Tugunlar: 10 va 50 ta

Metodlar: Trapezoid, Simpson, Kubik splayn

Natijalar

Intervallar soni	Trapezoid	Simpson	Kubik splayn
10	0.015	0.004	0.0012
50	0.003	0.0005	0.0001

ISSN 3030-3907

Xulosa

Splaynlar yordamida integratsiya va differensiallashda yuqori aniqlik olinadi, hisoblash jarayoni barqaror, lokal xatoliklar past bo‘ladi, dasturiy amalga oshirish oson, optimallashtirilgan bo’ladi.

Kelajak istiqbollari splaynlar asosidagi metodlar yuqori o‘lchamli modellar uchun samarali yechim beradi, Mashinali o‘rganishda regressiya va klassifikatsiya uchun potensialga ega, Parallel hisoblash va GPU yordamida optimallashtirish mumkin.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Burden, RL, Faires, JD Numerical Analysis , Brooks/Cole, 2011.
2. Shampin, LF Oddiy differensial tenglamalarning raqamli yechimi, Chapman & Hall, 1994 yil.
3. Quvvatov Behruz Ulug‘bek o‘g‘li. (2024). FRAKSIONAL HISOBLASHDAGI EYLER INTEGRALLARI VA MITTAG-LEFFLER FUNKSIYASI. IQRO INDEXING, 12(01), 9-14.
4. Behruz Ulugbek og, Quvvatov. "FUNDAMENTALS OF ALGORITHM AND PROGRAMMING IN MATHCAD SOFTWARE." Multidisciplinary Journal of Science and Technology 4.3 (2024): 410-418.
5. Quvvatov, B. (2023). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. UMUMLASHGAN TRAPETSIYALAR QOIDASI. Академические исследования в современной науке, 3(7), 137-142.
6. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. SIMPSON FORMULASI. Models and methods in modern science, 3(2), 223-228.
7. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. KLASSIK GAUSS KVADRATURALARI. Инновационные исследования в науке, 3(2), 94-103.
8. Quvvatov, B. (2024, February). TORTBURCHAK ELEMENT USTIDA GAUSS–LEJANDR FORMULASI. In Международная конференция академических наук (Vol. 3, No. 2, pp. 101-108).

ISSN 3030-3907