ISNN 3030-3907

2026
JUNE
ISSUE - 6
VOLUME -5

DEVELOPMENT OF SCIENCE

scientific journal



Development of science

Ilmiy jurnal

IYUN 2026
Issue - 6, VOLUME – 5

ISSN 3030 -3907

Ilmiy jurnal OAK rayosatining 2024 yil 27 sentabrdagi 361-son qaroriga asosan 02.00.00 kimyo fanlari hamda 2025 yil 12 fevral 367- son qaroriga asosan 05.00.00 texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) va fan doktori (DSc) ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari yuzasidan dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR:
Temirov Alisher Hoshim o‘g‘li – texnika fanlari falsafa doktori (PhD),Dotsent.
TAHRIRIYAT KENGASH RAISI:
Fozilov Sadriddin Fayzullayevich – texnika fanlari doktori, professor
TAHRIRIYAT KENGASH A’ZOLARI

TEXNIKA FANLARI/ TECHNICAL SCIENCES/ ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Bozorov G‘ayrat Rashidovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Abdurahmonov Olim Rustamovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Adizov Bobur Zamirovich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Umumiy va noorganik kimyo instituti, professor
Hayitov Ruslan Rustamjonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Jumayev Qayum Karimovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Berdiyev Dorob Murodovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor
Maxmudov Rafiq Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Tilloyev Lochin Ismatilloyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Raxmonov Qahramon Sanakulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Barakayev Nusratullo Rajabovich
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti, professor.
Jo‘rayev Xayrullo Fayziyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Panoyev Erali Rajabboyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Ataullayev Sherzod Nabiullyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Malik Negmurodovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Axmedova Ozoda Bahronovna
Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti.
Safarov Bahri Jumayevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Xaydarov Axtam Amonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Safarov Jasur Alijon o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

KIMYO FANLARI/ CHEMICAL SCIENCES/ ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Axmedov Voxid Nizomovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Umarov Baqo Bafoyevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Kodirov Abduaxad Abduraximovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Qurbonov Mingniqul Jumagulovich
Qarshi davlat Universiteti, dotsent
Turemuratov Sharibay Naurizbaevich
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Qoraqalpog‘iston bo‘limi Bosh ilmiy kotibi, professor
Tursunov Kaxor Shonazarovich
Qarshi davlat Universiteti, professor
Do‘stov Hamro
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor
Panoyev Nodir Shavkatovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Olimov Bobur Bahodir o‘g‘li
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Kasimov Sherzod Abduazimovich
Termiz Davlat Universiteti, professor.
Aliqulov Rustam Valiyevich
Termiz Davlat Universiteti, professor
Tropov Xamza Tursunovich
Samarqand Davlat Universiteti, professor

IQTISODIYOT FANLARI/ ECONOMICS/ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Nizamov Aslitdin Badreddinovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Boboyev Akmal Choriyevich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Ergashxojayeva Shaxnoza Djasurovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Saidaxmedova Nodira Ilxomovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, professor
Muxsinov Bekzod Toxirovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shakarov Qulmat Ashirovich
Renessans ta'lim universiteti,dotsent.
Jumaeva Zulfiya Qayumovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Norova Salomat Yusupovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Avezova Shaxnoza Maxmudjonovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Jalilov Jamshid G‘anijonovich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, dotsent
Xasanova Gulruh Djumanazarovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.

PEDAGOGIKA FANLARI/ PEDAGOGICAL SCIENCES / ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Siddiqova Sadoqat G‘afforovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Zoyirov Erkin Xalilovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, DSc, professor
Gaffarov Feruz Hasanovich
Puchon Universiteti, *professor*
Ruziyev Davron Yuldashevich
Buxoro Davlat Universiteti, professor
Muradova Firuza Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Yunusova Gulandon Samiyevna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
To‘xtayeva Zebo Sharifovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, professor.
Navro‘zova Gulchixra Nigmatovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Uzoqova Laylo Polvonovna
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.
To‘raqulova Marjona Qiyom qizi
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Muradova Zarina Rashidovna
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Murodov Sanjar Aslonovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent.
Shodiyev Jahongir Jo‘raqulovich
Buxoro Davlat Texnika Universiteti, dotsent
Gaffarov Laziz Hasanovich
Buxoro muhandislik – texnologiya instituti, dotsent.

Tahririyat a’zolarning to‘liq ro‘yxati jurnalning www.devos.uz saytida keltirilgan.

Tahririyat hay’ati a’zolarining tarkibini o‘zgartirish hamda qo‘shimcha kiritish yoki tahririyat a’zoligidan chiqarish bosh muharrir tomonidan amalga oshiriladi.

ISSN 3030-3907

Development of science ilmiy jurnali 2024 yil 15 aprel kuni №256445 sonli guvohnoma bilan Davlat ro‘yxatidan o‘tgan.

To‘plam elektron ko‘rinishda (pdf formatida) mualliflarga taqdim etiladi. To‘plamga kiritiladigan maqolalarning mazmuni, ulardagi statistik ma’lumotlar va me’yoriy hujjatlarning to‘g‘riligiga hamda har qanday fikr - mulohazalarga mualliflarning o‘zlari mas’ul hisoblanadilar. Talablarga javob bermaydigan maqolalar to‘plamga kiritilmaydi. Tashkiliy qo‘mita maqola matnini qisqartirish, qisman tuzatish kiritish, seksiyalarga joylashtirish huquqiga ega.

ISSN 3030-3907

UDK 517.95

BIR JINSLI BO‘LMAGAN ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN MANBA ANIQLASH VA RETROSPEKTIV TESKARI MASALALARNI REGULYARIZATSIYA USULLARI BILAN YECHISH

Bozorova Mexriniso Quyli qizi
Osiyo xalqaro universiteti, magistrant
Yunusov G‘anisher G‘afirovich
Buxoro innovatsiyalar unibversiteti t.f.n., professor v.b.

Annotatsiya. Ushbu maqolada bir jinsli bo‘lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yiladigan to‘g‘ri va teskari boshlang‘ich-chegaraviy masalalar tahlil qilinadi. To‘g‘ri masala uchun o‘zgaruvchilarni ajratish (Fourier) va Green funksiyasi usullari bayon etilgan. Asosiy e’tibor ikki turdagi teskari masalaga — manba intensivligini vaqt bo‘yicha aniqlash va boshlang‘ich qiymatni qayta tiklash (retrospektiv) masalasiga — qaratilgan. Bu masalalarning Hadamar ma’nosida korrekt qo‘yilmaganligi spektral tahlil orqali ko‘rsatilgan. Ularni barqaror yechish uchun Tixonov regulyarizatsiyasi va Landweber iteratsion usuli qo‘llanilgan hamda regulyarizatsiya parametrini tanlashning Morozov nomuvofiqlik prinsipi, L-egri chizig‘i va GCV strategiyalari solishtirilgan. Python (NumPy, SciPy) muhitida o‘tkazilgan sonli tajribalar usullarning samaradorligini turli shovqin darajalarida baholash imkonini berdi.

Kalit so‘zlar: issiqlik tarqalish tenglamasi, bir jinsli bo‘lmagan tenglama, to‘g‘ri masala, teskari masala, manba aniqlash, retrospektiv masala, korrekt qo‘yilmagan masala, Tixonov regulyarizatsiyasi, Landweber iteratsiyasi, Morozov prinsipi.

Аннотация. В статье рассматриваются прямые и обратные начально-краевые задачи для неоднородного уравнения теплопроводности. Для прямой задачи изложены метод разделения переменных (Фурье) и метод функции Грина. Основное внимание уделено двум обратным задачам — определению интенсивности источника и восстановлению начального условия (ретроспективная задача). Некорректность этих задач по Адамару показана при помощи спектрального анализа. Для устойчивого решения применены регуляризация Тихонова и итерационный метод Ландвебера; сравнены стратегии выбора параметра регуляризации (принцип невязки Морозова, L-кривая, GCV). Численные эксперименты в среде Python подтверждают эффективность методов при различных уровнях шума.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, неоднородное уравнение, прямая задача, обратная задача, определение источника, ретроспективная задача, некорректная задача, регуляризация Тихонова, итерация Ландвебера.

Annotation. This paper analyses direct and inverse initial-boundary value problems for the inhomogeneous heat equation. For the direct problem the

separation of variables (Fourier) method and the Green's function method are presented. The main focus is on two inverse problems — identifying the time-dependent source intensity and reconstructing the initial condition (the retrospective problem). The ill-posedness of these problems in the sense of Hadamard is demonstrated through spectral analysis. To obtain stable solutions, Tikhonov regularization and the iterative Landweber method are applied, and the regularization-parameter selection strategies (Morozov's discrepancy principle, the L-curve, GCV) are compared. Numerical experiments carried out in Python (NumPy, SciPy) confirm the efficiency of the methods at various noise levels.

Keywords: heat equation, inhomogeneous equation, direct problem, inverse problem, source identification, retrospective problem, ill-posed problem, Tikhonov regularization, Landweber iteration, Morozov principle.

1. KIRISH.

Matematik fizika tenglamalari nazariyasining markaziy ob'ektlaridan biri bo‘lib issiqlik tarqalish tenglamasi xizmat qiladi. J.B. Fourier tomonidan XIX asr boshida ishlab chiqilgan klassik nazariya bugungi kunda nafaqat issiqlik tarqalishini, balki diffuziya, kimyoviy reaksiya kinetikasi va boshqa ko‘plab fizik jarayonlarni tasvirlovchi parabolik tipdagi tenglamalar nazariyasining asosini tashkil etadi [1, 19, 20]. Bir jinsli bo‘lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi — bu o‘ng tomonida tashqi manba funksiyasi mavjud parabolik tenglama bo‘lib, u metallurgiya, energetika, geofizika, biotibbiyot va atrof-muhit muhofazasi sohalarida keng qo‘llaniladi.

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun klassik to‘g‘ri masala — ma'lum koeffitsiyentlar, manba funksiyasi, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bo‘yicha yechimni topishdir. To‘g‘ri masala J. Hadamar ma'nosida korrekt qo‘yilgan masalalar sinfiga kiradi. Biroq amaliy masalalarda ko‘pincha aks holatga duch kelinadi: manba funksiyasi yoki ba'zi koeffitsiyentlar noma'lum bo‘lib, yechim haqida qo‘shimcha ma'lumotlar (masalan, biror nuqtada o‘lchangan haroratning vaqt bo‘yicha qiymatlari) mavjud bo‘ladi. Bunday noma'lum kattaliklarni aniqlash masalasi teskari masala deyiladi va u odatda korrekt qo‘yilmagan (ill-posed) bo‘lib, yechish uchun maxsus regulyarizatsiya apparatini talab qiladi [13, 14, 17].

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masalalar XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab faol o‘rganilmoqda. Bu sohada A.N. Tixonov, M.M. Lavrentiev, V.K. Ivanov, V.G. Romanov, S.I. Kabanixin, O.M. Alifanov kabi olimlarning ishlari fundamental ahamiyatga ega [10, 12, 13]. O‘zbekiston matematik maktabida ham parabolik tipdagi tenglamalar uchun teskari va lokalmas masalalarni o‘rganish bo‘yicha jiddiy natijalar olingan: akademik M.S. Salohiddinov, professor T.D. Juraev, T.K. Yuldashev, R.R. Ashurov, E.T. Karimov va R.D. Aloev maktablari ushbu yo‘nalishga sezilarli hissa qo‘shgan [1–9].

ISSN 3030-3907

Mazkur maqolaning maqsadi — bir jinsli bo‘lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun to‘g‘ri masalani yechishning analitik usullarini qisqacha bayon etish hamda ikki turdagi muhim teskari masalani — manba intensivligini aniqlash va retrospektiv masalani — regulyarizatsiya usullari yordamida barqaror yechish algoritmlarini taqdim etish va sonli tajribalar orqali ularning samaradorligini baholashdan iborat.

2. MASALANING QO‘YILISHI

Energiya saqlanish qonuni va Fourier qonuni birgalikda issiqlik tarqalish tenglamasini hosil qiladi. Bir jinsli va izotrop muhitda solishtirma issiqlik sig‘imi c, zichlik ρ va issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti k o‘zgarmas bo‘lganda, tenglama quyidagi soddalashtirilgan ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t), \quad x \in \Omega, \ 0 < t \le T \qquad (2.1)$$

bu yerda $u(x, t)$ — izlanayotgan harorat maydoni, $a^2 = k/(c\rho)$ — issiqlik o‘tkazuvchanlik (diffuzivlik) koeffitsiyenti, $f(x, t)$ — issiqlik manbai zichligi, Δ — Laplas operatori. Tenglamaga boshlang‘ich va chegaraviy shartlar qo‘shiladi:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,t)|_{\partial\Omega} = g(x,t) \qquad (2.2)$$

Agar barcha koeffitsiyentlar, manba va shartlar ma’lum bo‘lsa, yechimni topish to‘g‘ri masaladir. Agar tenglamadagi yoki shartlardagi biror element noma’lum bo‘lib, uning o‘rniga yechim haqidagi qo‘shimcha kuzatish berilsa, teskari masala vujudga keladi. Quyida bir o‘lchovli holatda ($\Omega = (0, l)$) masalalarni ko‘rib chiqamiz.

3. TO‘G‘RI MASALANI YECHISHNING ANALITIK USULLARI

3.1. Fourier metodi. Bir o‘lchovli, nol Dirixle chegaraviy shartli bir jinsli bo‘lmagan masala uchun yechimni bir jinsli masalaning xususiy funksiyalari $\sin(n\pi x/l)$ bo‘yicha qator ko‘rinishida qidiramiz. Manba funksiyasini ham shu bazis bo‘yicha yoyib, har bir koeffitsiyent $T_n(t)$ uchun birinchi tartibli oddiy chiziqli differensial tenglamaga kelamiz, uning yechimi integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida topiladi:

$$T_n(t) = T_n(0)\, e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(s)\, e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-s)}\, ds \qquad (3.1)$$

bu yerda $f_n(t)$ va $T_n(0)$ mos ravishda manba va boshlang‘ich qiymat φ(x) ning Fourier sinus koeffitsiyentlaridir. Eksponensial faktor $e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$ yechimning t o‘sgani sayin silliqlashuvini ta’minlaydi.

3.2. Green funksiyasi usuli. Green (manba) funksiyasi $G(x, t; \xi, \tau)$ yordamida (2.1)–(2.2) masalaning yechimi yopiq integral formula bilan ifodalanadi:

$$u(x,t) = \int_\Omega G_0(x,t;\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_\Omega G(x,t;\xi,\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \qquad (3.2)$$

ISSN 3030-3907

Erkin fazoda Green funksiyasi Gauss tipidagi yadrodan iborat: $G = [4\pi a^2(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)$. Bu yadro nomanfiy, simmetrik va normallashgan bo‘lib, issiqlik kvantining vaqt o‘tishi bilan tarqalishini hamda saqlanishini aks ettiradi. Green funksiyasi keyinroq teskari masalalarni integral tenglamaga keltirishda asosiy vosita bo‘lib xizmat qiladi.

4. TESKARI MASALALAR VA ULARNING KORREKT QO‘YILMASLIGI.

4.1. Manba intensivligini aniqlash masalasi. Manba funksiyasi ajraladigan ko‘rinishda berilgan bo‘lsin: $f(x, t) = h(x)\, g(t)$, bunda $h(x)$ — ma’lum fazoviy konfiguratsiya, $g(t)$ — noma’lum vaqt bo‘yicha intensivlik. Bir jinsli boshlang‘ich shart ($\varphi \equiv 0$) va nol Dirixle sharti holatida x_0 nuqtadagi qo‘shimcha kuzatish $u(x_0, t) = \psi(t)$ berilsin. Green funksiyasi orqali bu masala g(t) ga nisbatan Volterra tipidagi birinchi tur integral tenglamaga keltiriladi:

$$u(x_0,t) = \int_0^t K(t-s)\, g(s)\, ds = \psi(t), \quad K(\tau) = \int_\Omega G(x_0,\tau;\, \xi, 0)\, h(\xi)\, d\xi \qquad (4.1)$$

Yadro $K(\tau)$ analitik funksiya bo‘lib $K(0) = 0$ ekanligi tufayli (4.1) tenglama yumshoq korrekt qo‘yilmagan masala hisoblanadi. Quyidagi yagonalik natijasi o‘rinli.

Teorema 1. Agar $h(x_0) \neq 0$ va $\varphi(x) \equiv 0$ bo‘lsa, (4.1) masala yechimga ega bo‘lganida u yagonadir. Isbot Volterra integral tenglamasining xossalariga va Green funksiyasining analitikligiga asoslanadi [4–6].

4.2. Retrospektiv (boshlang‘ich qiymatni tiklash) masalasi. Bu masalada yakuniy momentdagi harorat taqsimoti $u(x, T) = u_T(x)$ ma’lum bo‘lib, boshlang‘ich qiymat $\varphi(x) = u(x, 0)$ ni topish talab etiladi. Bir o‘lchovli bir jinsli holat ($f = 0$, $g = 0$) uchun Fourier qatorida:

$$u_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T} \sin(n\pi x/l), \quad \text{bundan} \quad \varphi_n = (u_T)_n \cdot e^{+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T} \qquad (4.2)$$

(4.2) formuladan ko‘rinadiki, boshlang‘ich qiymatni tiklashda har bir n-chi harmonika $e^{+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T}$ ko‘paytuvchi bilan kuchaytiriladi. $n \to \infty$ da bu kuchaytirgich eksponensial tarzda cheksizlikka intiladi. Demak, u_T dagi har qanday kichik yuqori chastotali shovqin φ_n da eksponensial kuchayadi va masalani to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechib bo‘lmaydi. Bu retrospektiv masalaning qattiq korrekt qo‘yilmagan (severely ill-posed) ekanligini ko‘rsatadi va regulyarizatsiya zaruratini keltirib chiqaradi.

5. REGULYARIZATSIYA USULLARI.

ISSN 3030-3907

5.1. Tixonov regulyarizatsiyasi. Teskari masalani operator tilida $A\,x = y$ ko‘rinishda yozamiz, bu yerda A: X → Y — to‘g‘ri masala operatori, y — kuzatish, x — izlanayotgan element. Korrekt qo‘yilmaslik A^{-1} ning chegaralanmaganligidan kelib chiqadi. A.N. Tixonov (1963) taklif etgan yondashuvda quyidagi minimallashtirish masalasi yechiladi [10, 14]:

$$J_\alpha(x) = \|A\,x - y\|_Y^2 + \alpha\,\|x\|_W^2 \to min,\ \alpha > 0 \qquad (5.1)$$

bu yerda α — regulyarizatsiya parametri. (5.1) funksionalning minimumi Euler tenglamasidan topiladi:

$$(A^* A + \alpha I)\,x_\alpha = A^* y \qquad (5.2)$$

A* A + α I operatori musbat aniqlangani uchun (5.2) tenglama korrekt qo‘yilgan va α > 0 da yagona yechim beradi. Retrospektiv masala uchun Tixonov yechimi Fourier koeffitsiyentlari orqali aniq yopiq ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\varphi_n^\alpha = (u_T)_n \cdot e^{a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T} \cdot \frac{1}{1 + \alpha\, e^{2a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T}} \qquad (5.3)$$

(5.3) ifodadan ko‘rinadiki, n → ∞ da filtr ko‘paytuvchisi $\frac{1}{1 + \alpha\, e^{2a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T}} \to$ 0 bo‘lib, yuqori chastotali komponentlar avtomatik tarzda bostiriladi. Shu tariqa yechimning turg‘unligi ta’minlanadi.

5.2. Landweber iteratsion usuli. Katta o‘lchovli masalalar uchun iteratsion regulyarizatsiya qulaydir. L. Landweber (1951) sxemasi $J(x) = \|A\,x - y\|^2$ funksionalining gradient kamayishiga asoslanadi:

$$x^{k+1} = x^k - \omega\, A^* (A\,x^k - y),\ k = 0, 1, 2, \dots,\ 0 < \omega < \frac{2}{\|A\|^2} \qquad (5.4)$$

Korrekt qo‘yilmagan masalalar uchun Landweber iteratsiyasi yarim-yaqinlashish (semiconvergence) xarakteriga ega: dastlabki qadamlarda yechim aniq yechimga yaqinlashadi, biroq keyingi qadamlarda shovqin kuchayib, yechim qaytadan uzoqlashadi. Shu sababli iteratsiya soni o‘zi regulyarizatsiya parametri vazifasini bajaradi va to‘xtatish qoidasi (stopping rule) zarur bo‘ladi.

5.3. Regulyarizatsiya parametrini tanlash. Optimal natija α (yoki iteratsiya soni k) ni to‘g‘ri tanlashga bog‘liq. Asosiy strategiyalar: (a) Morozov nomuvofiqlik prinsipi — α ni $\|A\,x_\alpha - y^\delta\| = c\delta$ (c > 1) shartdan topiladi, bunda δ — shovqin darajasi; (b) L-egri chizig‘i usuli (P.C. Hansen) — log-log shkalada egri chiziqning “tirsak” nuqtasi optimal kompromisni beradi; (c) General Cross Validation (GCV) — statistik baholash funksionaliga asoslangan va shovqin darajasini bilishni talab qilmaydi [17].

6. SONLI TAJRIBALAR VA NATIJALAR

Quyidagi sonli tajribalar Python (NumPy, SciPy) muhitida amalga oshirildi. To‘g‘ri masala Krank–Nikolson sxemasi bilan yechildi, teskari masala esa diskretlangan operator uchun (5.2)–(5.4) algoritmlari yordamida

ISSN 3030-3907

regulyarizatsiyalandi. Kuzatishga sun'iy Gauss shovqini qo'shildi: $\psi^{\delta}(t) = \psi(t) + \delta \cdot \eta(t)$.

6.1. Test masala 1: manba intensivligini tiklash. [0, 1] oralig'ida, T = 1, a = 1: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sin(\pi x)\, g(t)$, u(x,0) = 0, u(0,t) = u(1,t) = 0. Haqiqiy intensivlik g(t) = 1 + sin(2πt) tanlandi va u(0.5, t) bo'yicha kuzatish hosil qilindi. Natijalar 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval.

Manba intensivligini Tixonov regulyarizatsiyasi bilan tiklash natijalari

Shovqin darajasi δ	Optimal α_opt	Xatolik $\|g_\alpha - g\|_{L^2}$
0.001 (kichik)	$\approx 10^{-6}$	≈ 0.012
0.01 (o'rta)	$\approx 10^{-4}$	≈ 0.068
0.1 (katta)	$\approx 10^{-2}$	≈ 0.21

Shovqin darajasi ortgani sayin optimal regulyarizatsiya parametri ham ortadi, tiklash sifati esa pasayadi. Bu manba aniqlash masalasining yumshoq korrekt qo'yilmaganligini tasdiqlaydi.

6.2. Test masala 2: retrospektiv masala. f = 0, g = 0, T = 0.5, a = 1. Haqiqiy boshlang'ich qiymat φ(x) = sin(πx) + 0.5 sin(3πx) tanlandi. Natijalar 2-jadvalda berilgan.

2-jadval.

Retrospektiv masalani Tixonov regulyarizatsiyasi bilan yechish natijalari

Shovqin darajasi δ	Optimal α_opt	Xatolik $\|\varphi_\alpha - \varphi\|_{L^2}$
0.001	$\approx 10^{-8}$	≈ 0.05
0.01	$\approx 10^{-5}$	≈ 0.18
0.1	$\approx 10^{-2}$	≈ 0.42

Retrospektiv masalada xatolik shovqin darajasiga nisbatan ancha tez o'sadi va mutlaq xatolik darajasi 1-jadvalga nisbatan sezilarli yuqori bo'lib qoladi. Bu uning qattiq korrekt qo'yilmaganligini amalda tasdiqlaydi.

6.3. Landweber iteratsiyasining yarim-yaqinlashishi. Test masala 1 ni Landweber usuli bilan δ = 0.01 sharti uchun yechganda, iteratsiya soni ortishi bilan xatolikning o'zgarishi 3-jadvalda berilgan.

3-jadval.

Landweber iteratsiyasining yarim-yaqinlashish xarakteri (δ = 0.01)

Iteratsiyalar soni k	Xatolik $\|g^k - g\|$
5	0.12 (yaqinlashish boshlanishi)

ISSN 3030-3907

20	0.068 (optimal yechim)
100	0.085 (shovqin kuchayishi)
500	0.31 (yechim degradatsiyasi)

3-jadval Landweber iteratsiyasining yarim-yaqinlashish xususiyatini aniq ko‘rsatadi: eng yaxshi natija k = 20 atrofida erishiladi, undan keyin shovqin kuchayib yechim sifati pasayadi. Morozov nomuvofiqlik prinsipi aynan k = 20 da to‘xtashni tavsiya etadi, bu erta to‘xtatish (early stopping) qoidasining samaradorligini tasdiqlaydi.

6.4. Parametr tanlash usullarining solishtirma tahlili. Test masala 1 da turli strategiyalar quyidagi natijalarni berdi: Morozov — $\alpha_opt = 1.2\times10^{-4}$, xatolik 0.069; L-egri chizig‘i — $\alpha_opt = 8.7\times10^{-5}$, xatolik 0.071; GCV — $\alpha_opt = 2.1\times10^{-4}$, xatolik 0.073; apriori qoida — $\alpha_opt = 5\times10^{-4}$, xatolik 0.082. Morozov va L-egri chizig‘i usullari deyarli teng samaradorlikka ega. Morozov shovqin darajasini bilishni talab qiladi, L-egri chizig‘i esa talab qilmaydi; shu sababli shovqin darajasi noma’lum amaliy holatlarda ko‘pincha L-egri chizig‘i usuli afzal ko‘riladi.

7. XULOSA.

Mazkur maqolada bir jinsli bo‘lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun to‘g‘ri va teskari masalalar tahlil qilindi. To‘g‘ri masalani yechishda Fourier metodi va Green funksiyasi usuli bayon etildi. Ikki muhim teskari masala — manba intensivligini aniqlash va retrospektiv masala — ko‘rib chiqildi; ularning korrekt qo‘yilmasligi spektral tahlil orqali asoslandi. Ko‘rsatildiki, manba aniqlash masalasi yumshoq, retrospektiv masala esa qattiq korrekt qo‘yilmagan masalalar sinfiga kiradi.

Barqaror yechimlar olish uchun Tixonov regulyarizatsiyasi va Landweber iteratsion usuli qo‘llanildi. Sonli tajribalar quyidagi xulosalarni berdi: (1) regulyarizatsiya parametri shovqin darajasi bilan muvofiqlashtirilishi shart; (2) retrospektiv masalada xatolik manba masalasiga nisbatan sezilarli yuqori; (3) Landweber iteratsiyasi yarim-yaqinlashish xarakteriga ega bo‘lib, erta to‘xtatish qoidasini talab qiladi; (4) parametr tanlashda Morozov va L-egri chizig‘i usullari eng samarali bo‘lib, shovqin darajasi noma’lum holatlarda L-egri chizig‘i afzaldir.

Olingan natijalar O‘zbekiston sharoitida bir qator amaliy sohalarda — qishloq xo‘jaligida tuproq termal rejimini bashorat qilishda, metallurgiya va qurilish materiallari ishlab chiqarishida, geliotermal qurilmalarni loyihalashda, atmosfera ifloslanishi manbalarini tiklashda hamda geofizik tadqiqotlarda qo‘llanilishi mumkin. Kelajakdagi tadqiqotlar nochiziqli koeffitsiyent teskari masalalari, kasr tartibli operatorli modellar va Bayes (statistik) yondashuvlar yo‘nalishida davom ettirilishi maqsadga muvofiqdir.

ISSN 3030-3907

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Salohiddinov M.S. Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: O‘qituvchi, 2002. — 384 b.
2. Salohiddinov M.S. Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. — Toshkent: Fan, 1986. — 256 b.
3. Jo‘rayev T.D. Aralash va kompozit tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. — Toshkent: Fan, 1979. — 240 b.
4. Yuldashev T.K. Nochiziqli integro-differensial tenglamalar uchun teskari masalalar. — Toshkent: Universitet, 2019. — 312 b.
5. Yuldashev T.K. Issiqlik tipidagi tenglamalar uchun bir teskari masala // O‘zbek matematika jurnali. — 2017. — № 3. — B. 56–68.
6. Yuldashev T.K. Fredgolm tipidagi integro-differensial tenglamalar uchun manba aniqlash masalasi // Matematika va informatika xabarlari. — 2018. — № 2. — B. 78–92.
7. Ashurov R.R. Subdiffuziya tenglamasi uchun lokalmas masala // O‘zbekiston matematika jurnali. — 2019. — № 3. — B. 12–28.
8. Karimov E.T. Kasr tartibli operatorli teskari masalalar // Matematika va informatika muammolari. — 2020. — № 1. — B. 34–47.
9. Aloev R.D., Eshkuvatov Z.K., Davlatov Sh.O. Parabolik tenglamalar uchun ayirmali sxemalar va ularning turg‘unlik tahlili // Sonli analiz va matematik modellashtirish. — Toshkent, 2018. — B. 67–82.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: ЛКИ, 2014. — 480 с.
12. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988. — 280 с.
13. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
14. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. — 321 p.
15. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — 3rd ed. — New York: Springer, 2017. — 406 p.
16. Hansen P.C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. — Philadelphia: SIAM, 1998. — 247 p.
17. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. — New York: Wiley-Interscience, 1985. — 308 p.
18. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1971. — 396 p.

ISSN 3030-3907

19.Cannon J.R. The One-Dimensional Heat Equation. — Cambridge: Cambridge University Press, 1984. — 483 p.

ISSN 3030-3907