UDK: 519.2 + 517.9

НЕСМИЩЕННАЯ И ε - СМЕЩЁННАЯ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБШЕННОГО УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ.

Т.Тожиев

Ферганского государственного университета доцент

Д.Исмоилова

Ферганского государственного университета старший преподаватель

Аннотация. В работе изложены методы приближения функционалов от диффузий и от оптимально управляемого диффузионного процесса, а также методы приближения диффузионных процессов, являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито как управляемых, так и неуправляемых. Поскольку многие из функционалов, которые мы будем вычислять и приближать, в действительности являются слабыми решениями дифференциальных уравнений в частных производных (слабое решение может быть представлено как некоторый функционал от подходящего диффузионного процесса), то методы приближения слабых решений тесно связаны с методами приближений диффузионных процессов и функционалов от них. Кроме того, внешний вид дифференциальных уравнений в частных производных, которым, по крайней мере формально, удовлетворяют интересующие нас функционалы, подсказывает нам численные методы решения этих задач.

Ключевые слова. Задача Коши, матрица, алгоритм, фундаментальное решения, марковский цеп, ядро интегрального уравнения, индикатор множества, изотропный вектор.

Annotatsiya. Ishda funksiyalarni diffuziyalardan va optimal boshqariladigan diffuziya jarayonidan yaqinlashtirish usullari, shuningdek, boshqariladigan va boshqarilmaydigan Ito stoxastik differensial tenglamalarining echimlari bo'lgan diffuziya jarayonlarini yaqinlashtirish usullari bayon etilgan. Biz hisoblaydigan va yaqinlashtiradigan ko'plab funktsiyalar aslida qisman differentsial tenglamalarning zaif echimlari bo'lganligi sababli (zaif echim mos keladigan diffuziya jarayonining ba'zi funktsiyalari sifatida ifodalanishi mumkin), zaif echimlarni taxmin qilish usullari diffuziya jarayonlari va ulardan funktsionallarning taxminiy usullari bilan chambarchas bog'liq. Bundan tashqari, hech bo'lmaganda rasmiy ravishda bizni qiziqtirgan funktsional imkoniyatlarni qondiradigan qisman differentsial tenglamalarning ko'rinishi bizga ushbu muammolarni hal qilishning raqamli usullarini aytib beradi.

Kalit so'zlar. Koshi muammosi, matritsa, algoritm, fundamental echim, Markov zanjiri, integral tenglamaning yadrosi, to'plam ko'rsatkichi, izotrop vektor.

ISSN 3030-3907

Annotation. The paper describes methods for approximating functionals from diffusions and from an optimally controlled diffusion process, as well as methods for approximating diffusion processes that are solutions to stochastic differential equations of Ito, both controlled and uncontrolled. Since many of the functionals that we will calculate and approximate are actually weak solutions of partial differential equations (a weak solution can be represented as some functional from a suitable diffusion process), methods for approximating weak solutions are closely related to methods for approximating diffusion processes and functionals from them. In addition, the appearance of partial differential equations, which, at least formally, satisfy the functionals we are interested in, suggests numerical methods for solving these problems.

Keywords: Cauchy problem, matrix, algorithm, fundamental solutions, Markov chain, kernel of integral equation, set indicator, isotropic vector.

Введение

Рассмотрим задачу Коши в классической постоновке в $(n+1)$ мерном пространстве R^{n+1} в слое $\Omega = R^n \times [0,T]$

$$(L_1 u)(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{k} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \beta_j^m x^j \frac{\partial u(x,t)}{\partial x^m} = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^n, \qquad (2)$$

где α^{ij} и β_j^m $(i = 1,2,...,k, j = 1,2,...,k, m = 1,2,...,l)$ постоянные коэффчциенты, $n = k + l$.

Пусть $\alpha = (\alpha^{ij})$ - $k \times k$ матрица, $\beta = (\beta_j^m)$ - $l \times k$ матрица.

Предлогаем:

матрица $\alpha = (\alpha^{ij})$ симметрична и положительно определена.

матрица $\beta = (\beta_j^m)$ такая что, $l \times l$ матрица Грамма $\left(\omega = (\beta \alpha \beta^T)^{-1}\right)$ положительно определена (невырождена).

Функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ будем считать непрерывными в R^n. В педложении сушествования единственности решения задач (1)-(2) построим алгоритм для его численной реализатsii.

Для дальнейшего будут удобны следующие обозначения. Введем (в блочной записи) $n \times n$ матрицы. Эти матрицы имееют следующий вид

$$a = a(s) = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2^T & m_3 \end{pmatrix}, \qquad q = q(s) = a^{-1}(s),$$

ISSN 3030-3907

$$C(S)=\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -s\beta_l & I \end{pmatrix}=\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s\beta & 0 \end{pmatrix},\quad d(\rho)=\begin{pmatrix} \rho^{1/2}I_k & 0 \\ 0 & \rho^{3/2}I_l \end{pmatrix},$$

блок $m_1=\frac{1}{4s}\left[\alpha^{-1}+3\beta^T\omega\beta\right]$ размера $k\times k$, блок $m_2=\frac{3}{2s^2}\beta^T\omega$ размера $k\times l$, блок m_2^T размера $l\times k$, $m_3=\frac{3}{s^3}\omega$ размера $l\times l$, матрицы $I_k,0,\beta,I_l$ аналогичных размеров. Здесь и далее I_r - $r\times r$ единичная матрица, $d(\rho)$ - диагональная матрица $s=t-\tau$.

Лемма 1. Матрицы $a(s)$ и $q(s)$ при $s>0$ положительно определены.

Доказательства. Легко проверить, что матрица $q(s)$ в блочном разбиении имеет вид

$$q=q(s)=s\begin{pmatrix} 4\alpha & -2s\alpha\beta^T \\ -2s\beta\alpha & \frac{4}{3}s^2\omega^{-1} \end{pmatrix}=a^{-1}(s)=a$$

Достаточно доказать положительную определенность матрицы $\frac{1}{4s}q(s)$. Соответствующая ей квадратичная форма от переменных $\xi\in R^k$ (R^k - k - мерное евклидово пространство строк) и $\eta\in R^l$ имеет вид

$$K=\xi\alpha\xi^T-s\xi\alpha\beta^T\eta^T+\frac{s^2}{3}\eta\beta\alpha\beta^T\eta^T=\left(\xi-\frac{1}{2}s\eta\beta\right)\alpha\left(\xi-\frac{1}{2}s\eta\beta\right)^T+\frac{1}{12}\eta\left(\beta\alpha\beta^T\right)\eta^T$$

Видим, что она равна сумме двух квадратичных форм с невырожденными матрицами Грамма α и $\beta\alpha\beta^T$ и поэтому $K\geq 0$. Равенство $K=0$ влечет равенства $\eta=0$ и $\xi-\frac{1}{2}s\eta\beta=0$, т.е. Лемма доказана.

Из доказанного следует, что матрица a является симметричной и положительно определенной. Это означает что квадратичная форма $xax^T\geq 0$ для произвольного $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$, поэтому матрица a представима в виде произведения некоторой матрицы b на ее транспонированную b^T, а именно $a=bb^T$.

Тогда $Z(x,t;y,\tau)$ - фундаментальное решение уравнение (1) с сингулярностью в точке (y,τ) имеет вид

ISSN 3030-3907

$$Z(x,t;y,\tau)=$$

$$=\pi^{-n/2}\|a\|^{1/2}(t-\tau)^{-\gamma/2}\exp\left\{-(y-Cx)^T\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t-\tau}\right)\mathrm{ad}\left(\frac{1}{t-\tau}\right)(y-Cx)\right\} \quad (3)$$

где $\|a\|=\det(a)$, $\gamma=k+3l$.

С помошью фундаментального решения определим в R^{n+1} области (шароиды) следующим образом. Пусть число (параметр) $r>0$.
Область

$$B_r(x,t)=\left\{(y,\tau):Z(x,t;y,\tau)>\pi^{-n/2}\|a\|^{1/2}r^{-\gamma},t>\tau\right\}$$

будем называть шароидом радиуса r с центром в точке (x,t). $B_r(x,t)$ можно переписать в виде

$$B_r(x,t)=\left\{(y,\tau):(y-Cx)^T\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t-\tau}\right)\mathrm{ad}\left(\frac{1}{t-\tau}\right)(y-Cx)\le\frac{\gamma}{2}\ln\frac{r^2}{t-\tau}\right\} \quad (4)$$

Из (4) видно, что τ удовлетворяет следущим условиям $\tau<t$, $\tau>t-\tau^2$. Каждое сечение шароида горизонтальной плоскостью $\tau=const$, $t-\tau^2<const<t$, является n - мерным эллипсоидом с центром в точке $\left(e^{-(t-\tau)\beta}x,\tau\right)$. Если $\rho<r$. то $B_\rho(x,t)\subset B_r(x,t)$. При $r\to 0$ $B_r(x,t)$ и $\partial B_r(x,t)$ монотонно стягиваются к центру (x,t).

Поэтому сушествует такое $r>0$ что при $(x,t)\in\Omega$, $\overline{B_r(x,t)}\subset\overline{\Omega}$.

Пусть $r>0$ такое что $\overline{B_r(x,t)}\subset\overline{\Omega}$ тогда для решения задачи (1)-(2). справедливо следующие соотношение

$$u(x,t)=(E_ru)(x,t)+\overline{f}(x,t), \quad (5)$$

где

$$(E_ru)(x,t)=$$

$$=(\gamma/\pi)^{n/2}\int_0^1\lambda^{\gamma-1}\left(\ln(1/\lambda)\right)^{n/2}\iint_{S_1(0)}u\left(y(\lambda,\theta),\tau(\lambda)\right)н^T(\theta)4b\alpha b^T н(\theta)dsd\lambda\text{'}$$

$$\overline{f}(x,t)=\iint_{B_r(x,t)}\left[Z(x,t;y,\tau)-\pi^{-n/2}\|a\|^{1/2}r^{-\gamma}\right]f(y,\tau)dyd\tau.$$

Здесь $S_1(0)$ $(n-1)$ мерная единичная сфера с обычными ортогональными координатами $\theta=(\theta_2,\theta_3,...,\theta_n)$, $0\le\theta_j\le\pi$ для $2\le j\le n-1,0\le\theta_j\le 2\pi$. $H(\theta)\in S_1(0)$ единичный n - мерный вектор.

$$y(\lambda,\theta)=e^{-r^2\lambda^2\beta}x+\left(\gamma\ln(1/\lambda)\right)^{1/2}d\left(r^2\lambda^2\right)b^{-1}н(\theta), \quad (6)$$

ISSN 3030-3907

$\tau(\lambda)=t-r^2\lambda^2$.

Из (6) следует, что если $r(x,t)\le t^{1/2}$, при $(x,t)\in\Omega$, то $\overline{B_r(x,t)}\subset\overline{\Omega}$.

Приступим к построению марковский цепи $\left\{\left(x^j,t^j\right)\right\}_{j=0}^{\infty}$, на которой будем строить несмещенную оценку решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2).

Для $u(x,t)=1$, преминев формулу (5) получим

$$(\gamma/\pi)^{n/2}\int_0^1\lambda^{\gamma-1}\left(\ln(1/\lambda)\right)^{n/2}d\lambda\iint_{S_1(0)}н^T(\theta)4b\alpha b^T н(\theta)ds=1$$

Отсюда следует, что ядро интегральрого уравнения (5) можно рассматривать как плотность распределения.

Рассмотрим интеграл

$$J=\int_0^1\lambda^{\gamma-1}\left(\ln(1/\lambda)\right)^{n/2}d\lambda.$$

Сделав замену переменных $\lambda=e^{-\rho/\gamma}$, получим

$$J=\frac{1}{\gamma^{(1+n/2)}}\int_0^{\infty}e^{-\rho}\rho^{n/2}d\rho=\frac{\Gamma(1+n/2)}{\gamma^{(1+n/2)}}$$

где $\Gamma(\square)$ - гамма функция. Теперь можем представить $(E_ru)(x,t)$ следующим образом

$$(E_ru)(x,t)=\int_0^{\infty}P_1(\rho)d\rho\int_{S_1(0)}^{\infty}P_2(H)u\left(y\left(e^{-\rho/\gamma},\theta\right),\tau\left(e^{-\rho/\gamma}\right)\right)d\rho$$

где $P_1(\rho)$ - плотность гамма-распределенной случайной величины с параметром $(1+n/2)$, $P_2(H)=H^T4B\alpha B^TH/\gamma\sigma_n$.

Для наших целей будем моделировать случайной вектор с полностью распределения

$$P_2(H)=P_2(H_1,H_2,...,H_n)=\frac{1}{\gamma\sigma_n}\sum_{ij=1}^{n}K_{ij}H_iH_j\chi_{S_1(0)}(H),\qquad(7)$$

где $\chi_{S_1(0)}(H)$ - индикатор множества $S_1(0)$, σ_n - поверхность единичной сферы, K_{ij} - элементы матрицы $K=4b\alpha b^T$ размера - $n\times n$. Так как $H_1,H_2,...,H_n$ являются координатами единичного вектора и $H_1^2+H_2^2+...+H_n^2=1$ получим $H^TKH\le\mu_1$, где μ_1 - наибольшее собственное значение матрицы K. Тогда можно моделировать случайный вектор с плотностью распределения 3.5.7 методом Неймана. Приведем алгоритм моделирования.

ISSN 3030-3907

Алгоритм:

1) Моделируется $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ изотропный вектор и γ_2 - равномерно распределенная в $(0,1)$ случайная величина;
2) $E=\mu_1\gamma_1$;
3) Если $\left(\sum_{ij=1}^{n}K_{ij}\omega_i\omega_j\right)/\gamma\geq E$, то ω принимается, иначе повторяется пункт 1).

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ - последовательность независимых гамма распределенных случайных величин с параметром $(1+n/2)$, $\{\omega^j\}_{j=1}^{\infty}$ - последовательность независимых плотностью распределения $P_2(H)$.

Определим в Ω цепь Маркова $\{x^j,t^j\}_{j=0}^{\infty}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$x^0=x,\ t^0=t,\ t^j=t^{j-1}\left(1-\exp\left(-2\xi_j/\gamma\right)\right),$$

$$x_i^j=x_i^{j-1}+t_{j-1}\exp\left(-\xi_j/\gamma\right)\xi_j^{1/2}\sum_{m=1}^{n}b_{im}\omega_i^j, \qquad (8)$$

$$x_{k+p}^j=x_{k+p}^{j-1}-t_{j-1}\exp\left(-2\xi_j/\gamma\right)\sum_{c=1}^{k}\beta_{pc}x_c^j+t_{j-1}^{3/2}\exp\left(-3\xi_j/\gamma\right)\xi_j^{1/2}\sum_{\nu=1}^{n}b_{k+p,\nu}\omega_i^j,$$

где $i=1,2,...,k$, $p=1,2,...,1$, $j=1,2,...$ $r\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)=\left(t_{j-1}\right)^{1/2}$ соотношения (8) получены из формулы (6). Теперь формулу (5) мы можем записать в следующем виде

$$u\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)=E_{\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)}u\left(x^j,t^j\right)+\overline{f}\left(x^{j-1},t^{j-1}\right) \qquad (9)$$

Определим последовательность случайных величин $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ следующим равенством

$$\eta_l=\sum_{j=1}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)f\left(y^j,\tau^j\right)+u\left(x^l,t^l\right) \qquad (10)$$

где $\left(y^j,\tau^j\right)$ случайная точка шароида $B_r(x,t)$ при фиксированных $\left(x^j,t^j\right)$, имеющая в нем плотность распределения

$$\frac{\left[Z\left(x^j,t^j;y,\tau\right)-\|a\|^{1/2}\pi^{-n/2}r^{-\gamma}\right]}{h\left(x^j,t^j\right)},\ \text{где}$$

$$h(x,t)=\iint_{B_r(x,t)}\left[Z\left(x^j,t^j;y,\tau\right)-\|a\|^{1/2}\pi^{-n/2}r^{-\gamma}\right]dyd\tau.$$

ISSN 3030-3907

Взяв $u(x,t)=t$ и применив формулу (2.9) для $j=1$, из (2.8) получим

$$h(x,t)=E_{(x,t)}\exp(-2\xi/\gamma)=\frac{r^2(x,t)}{\Gamma(1+n/2)}\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}\int_0^{\infty}e^{-\eta}\eta^{n/2}d\eta=$$

$$=r^2(x,t)\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} \quad (11)$$

Пусть $\{F_l\}_{l=0}^{\infty}$ последовательность σ - алгебр порожденная случайными величинами $\xi_1,\xi_2,...,\xi_l$ последовательностью векторов $\omega^0,\omega^1,...,\omega^l$ и случайными точками $(y^0,\tau^0),(y^1,\tau^1),...,(y^{l-1},\tau^{l-1})$, $u_{f,\varphi}(x,t)$ - решения задачи (1)-(2). соответствующие заданным f,φ.

Теорема 1. а) Последовательность $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал. Из определения последовательности σ - алгебр $\{F_l\}_{l=0}^{\infty}$.

б) Если $u_{f^2,0}(x,t)<+\infty$ и $u_{|f|,0}(x,t)<+\infty$, то η_l является квадратична интегрируемой.

Доказательство: Сперва докажем, что $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал. Из определенния F_l видно, что η_l является F_l – измеримой. Далее

$$E_{(x,t)}(\eta_{l+1}/F_l)=E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l}\left(h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)+u(x^{l+1},t^{l+1})\right)/F_l\right)=$$

$$=E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}\left(h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)+h(x^l,t^l)f(y^l,\tau^l)+u(x^{l+1},t^{l+1})\right)/F_l\right)=$$

$$=E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)/F_l\right)+E_{(x,t)}\left(h(x^l,t^l)f(y^l,\tau^l)/F_l\right)+$$

$$+E_{(x,t)}\left(u(x^{l+1},t^{l+1})/F_l\right)$$

Так как $\sum_{j=0}^{l-1}h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)$ является F_l – измеримой, то из свойств условного математического ожидания следует, что

$$E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)/F_l\right)=\sum_{j=0}^{l-1}h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j).$$

А т.к $h(x^l,t^l)$ - F_l – измерима и $f(y^l,\tau^l)$ не зависит от F_l то

$$E_{(x,t)}\left(h(x^l,t^l)f(y^l,\tau^l)/F_l\right)=h(x^l,t^l)E_{(x,t)}f(y^l,\tau^l).$$

ISSN 3030-3907

Далее и $u\left(x^{l+1},t^{l+1}\right)$ не зависит от F_l и поэтому

$E_{(x,t)}\left(u\left(x^{l+1},t^{l+1}\right)/F_l\right)=E_{(x,t)}\left(u\left(x^{l+1},t^{l+1}\right)\right)$, тогда имеем

$$E_{(x,t)}\left(\eta_{l+1}/F_l\right)=\sum_{j=0}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)f\left(y^j,\tau^j\right)+h\left(x^l,t^l\right)E_{(x,t)}f\left(y^l,\tau^l\right)+E_{(x,t)}u\left(x^{l+1},t^{l+1}\right).$$

Используя формулы (9) и (10), получим

$$E_{(x,t)}\left(\eta_{l+1}/F_l\right)=\sum_{j=0}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)f\left(y^j,\tau^j\right)+u\left(x^l,t^l\right)=\eta_l.$$

Отсюда следует, что $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{F_l\}_{l=0}^{\infty}$.

Докажем, что $E_{(x,t)}\eta_l^2\le\infty$. Достаточно показать, что

$$I=E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)f\left(y^j,\tau^j\right)\right)^2<+\infty$$

Разбивая I на два слагаемых I_1, I_2

$$I=E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}h^2\left(x^j,t^j\right)f^2\left(y^j,\tau^j\right)\right)+$$

$$+2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{l-2}\sum_{k=j+1}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)h\left(x^k,t^k\right)f\left(y^j,\tau^j\right)f\left(y^k,\tau^k\right),$$

покажем конечность I.

Из (10) и условия $r^2(x,t)\le t$ получим, что $h(x,t)\le\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}t$ и поэтому

$$I_2=2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{l-2}\sum_{k=j+1}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)h\left(x^k,t^k\right)f\left(y^j,\tau^j\right)f\left(y^k,\tau^k\right)\le$$

$$\le 2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{l-2}\sum_{k=j+1}^{l-2}h\left(x^j,t^j\right)f\left(y^j,\tau^j\right)h\left(x^k,t^k\right)f\left(y^k,\tau^k\right)\le$$

$$\le 2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{l-2}\sum_{k=j+1}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)\left|f\left(y^j,\tau^j\right)\right|h\left(x^k,t^k\right)\left|f\left(y^k,\tau^k\right)\right|\le$$

$$\le 2E_{(x,t)}\sum_{j=0}^{l-2}h\left(x^j,t^j\right)\left|f\left(y^j,\tau^j\right)\right|u_{|f|,0}\left(x^j,t^j\right)\le$$

$$\le 2\left(\max_{x\in R^n,t>\tau}u_{|f|,0}(x,\tau)\right)u_{|f|,0}(x,t)<+\infty$$

Теорема доказана.

ISSN 3030-3907

Теперь покажем один из способов оценки по одному случайному узлу величины

$$\overline{f}(x,t)=\iint\limits_{B_r(x,t)}\left[Z(x,t;y,\tau)-\pi^{-n/2}\|a\|^{1/2}r^{-\gamma}\right]f(y,\tau)dyd\tau.$$

Лемма (2). Для функции $\overline{f}(x,t)$ справедливо соотношение

$$\overline{f}(x,t)=\left(\gamma/(\gamma+2)\right)^{(1+n/2)}r^2Ef\left(y(\xi,\zeta,\omega),\tau(\xi,\zeta)\right),\text{ где}$$

$$y(\xi,\zeta,\omega)=$$

$$=e^{-r^2\exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right)\zeta^{2/\gamma}\beta}x+\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\xi\right)^{1/2}a\left(r^2\exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right)\zeta^{2/\gamma}b^{-1}\omega\right)^{(1)2}$$

$$\tau(\xi\zeta)=\mathrm{t}-\exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right)\zeta^{2/\gamma}.$$

Здесь ξ - гамма распределенная случайная величина с параметром $(n/2)$, ζ - бетта распределенная случайная величина с параметром $(2/\gamma,2)$ и ω - случайный единичный вектор.

Доказательства: введем область

$$B_r=\left\{(y,\tau):y^Td(1/\tau)ad(1/\tau)y<\frac{\gamma}{2}\ln r^2/\tau,\tau>0\right\}$$

получающуюся, очевидно, зеркальным отображением шароидов $B_r(0,0)$ относительно плоскости $\tau=0$. Эти области также будем называть шароидами (радиуса r). Тогда имеем

$$f(x,t)=\frac{\|a\|^{1/2}}{\pi^{n/2}r^{\gamma}}\iint\limits_{B_r}\left[r^{\gamma}\tau^{-\gamma/2}\exp\left(-y^Td(1/\tau)ad(1/\tau)y\right)-1\right]\times$$

$$\times f\left(e^{-\tau\beta}x+y,t-\tau\right)dyd\tau$$

Следаем в этом интеграле замену переменных интегрированиния (y,τ) на (ρ,λ,θ) по формулам

$$y=\left(\gamma\ln(1/\lambda)\right)^{1/2}d(\tau)b^{-1}H(\theta),\qquad \tau=\lambda^2\rho^2.$$

Несложные вычисления показывает, что

$$dyd\tau=\|a\|^{-1/2}\gamma^{n/2}\lambda^{\gamma+1}\left(\ln(1/\lambda)\right)^{(n-2)-1}\rho^{\gamma+1}d\rho d\lambda ds$$

$$r^{\gamma}\tau^{-\gamma/2}\exp\left(-y^Td(1/\tau)ad(1/\tau)y\right)=r^{\gamma}\rho^{-\gamma}.$$

Область интегрирования переобразуется в цилиндр $(0\le\rho\le r)\times(0\le\lambda\le1)\times S_1(0)$. Отсюда получим

ISSN 3030-3907

$$\overline{f}(x,t)=\frac{\gamma^{n/2}}{\pi^{n/2}r^{\gamma}}\int_0^r\rho\left(r^{\gamma}-\rho^{\gamma}\right)d\rho\int_0^1\lambda^{\gamma+1}\left(\ln(1/\lambda)\right)^{n/2-1}d\lambda\times$$

$$\times\iint_{S(0)}f\left(e^{-\lambda^2\rho^2\beta}x+\left(\gamma\ln(1/\lambda)\right)^{1/2}d\left(\rho^2\lambda^2\right)b^{-1}H(0),t-\lambda^2\rho^2\right).$$

Сначало во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $\lambda=e^{-Z/\gamma+2}$, затем во внешнем интеграле $\rho=\upsilon^{1/\gamma}r$ и тогда, получим

$$\overline{f}(x,t)=\frac{r^2}{\gamma\pi^{n/2}}\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{n/2}\int_0^1\upsilon^{2/\gamma-1}(1-\upsilon)d\upsilon\int_0^1e^{-z}z^{n/2-1}dz\times$$

$$\times\iint_{S(0)}f\left(y,\left(z,\upsilon,н(\theta)\right),\tau(z,\upsilon)\right)ds=r^2\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}\int_0^1P_1(\upsilon)d\upsilon\int_0^{\infty}P_2(z)d\upsilon\times$$

$$\times\int_{S_{1(0)}}P_3(н)f\left(y,\left(z,\upsilon,н(\theta)\right),\tau(z,\upsilon)\right)ds=r^2\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}Ef\left(y,(\xi,\zeta,\omega),\tau(\xi,\zeta)\right),$$

где ξ - случайная величина с плотностью распределения $P_2(z)=\frac{e^{-z}z^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)}$ - (гамма-распределение), ζ - случайная величина с плотностью распределения $P_1(\upsilon)=\frac{\upsilon^{2/\gamma-1}(1-\upsilon)}{B(2/\gamma,2)}$, ω - случайная вектор с плотностью распределения $P_3\left(н(\theta)\right)=1/\sigma_n$ ($\sigma_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(2/\gamma,2)}$ - поверхность единичной сферы). Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о вычислительной реализуемости оценки (10). Возьмем ε достаточно малым и рассмотрим $(\partial\Omega)_{\varepsilon}=\left(R^n\times[0,\varepsilon]\right)$.

Пусть $N_{\varepsilon}=\min\left\{l:\left(x^l,t^l\right)\in(\partial\Omega)_{\varepsilon}\right\}$ - момент первого попадания процесса $\left(x^l,t^l\right)$ в $(\partial\Omega)_{\varepsilon}$ т.е. N_{ε} - момент остановки процесса (марковский момент).

Лемма 3. Имеет место неравенство: $E_{(x,t)}N_{\varepsilon}\le\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}\frac{t}{\varepsilon}$;

Доказательство. Взяв $u(x,t)=t$ и применив формулы (10) и (11) получим

$$t=u_{1,0}(x,t)\ge E_{(x,t)}\sum_{j=1}^{N_{\varepsilon}-1}h\left(x^j,t^j\right)=\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)E_{(x,t)}\sum_{j=1}^{N_{\varepsilon}-1}r^2\left(x^j,t^j\right).$$

Из определения $r(x,t)$ следует что $r^2\left(x^j,t^j\right)=\left\{t^j\right\}\ge\varepsilon$.

ISSN 3030-3907

Отсюда получим, что $t \geq \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} \varepsilon E_{(x,t)} N_\varepsilon$. Следовательно $E_{(x,t)} N_\varepsilon \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} \frac{t}{\varepsilon}$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы (1). Тогда η_{N_ε} является несмещенной оценкой для $u(x,t)$. Дисперсия ее конечна.

Доказательство. Из теорема (1) следует, что η_l квадратично интегрируема и отсюда η_l является равномерно интегрируемой и $N_\varepsilon < +\infty$. Далее момент остановки процесса является марковским моментом. Поэтому согласно тэореме Дуба “О преобразовании свободного выбора” и формуле 3.5.9 $E\eta_{N_\varepsilon} = E\eta_l = u(x,t)$, т.е. η_{N_ε} является несмещенной оценкой для $u(x,t)$. Из определения случайных величин η_{N_ε} и η_∞ видно, что $D\eta_{N_\varepsilon} \leq D\eta_\infty$. Далее, имеем

$$\eta_\infty^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} h\left(x^i,t^i\right) f\left(y^i,\tau^i\right) + u\left(x^\infty,t^\infty\right)\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} h\left(x^i,t^i\right) f\left(y^i,\tau^i\right)\right)^2 +$$

$$+2u\left(x^\infty,t^\infty\right)\sum_{i=0}^{\infty} h\left(x^i,t^i\right) f\left(y^i,\tau^i\right) + u^2\left(x^\infty,t^\infty\right) = \sum_{i=0}^{\infty} h^2\left(x^i,t^i\right) f^2\left(y^i,\tau^i\right) +$$

$$+2\sum_{i=0}^{\infty} h\left(x^1,t^1\right) f\left(y^i,\tau^i\right) \sum_{j=i+1}^{\infty} h\left(x^j,t^j\right) f\left(y^j,\tau^j\right) + 2u\left(x^\infty,t^\infty\right)\sum_{i=0}^{\infty} h\left(x^i,t^i\right) f\left(y^i,\tau^i\right) +$$

$$+u^2\left(x^\infty,t^\infty\right)$$

$$E_{(x,t)}\eta_\infty^2 = \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} tu_{f^2,0}(x,t) + 2\left(\max_{x\in R^n,\tau<t} u_{|f|,0}(x,\tau)\right)\times$$

$$\times u_{|f|,0}(x,t) + 2u_{0,\varphi}(x,t)u_{|f|,0}(x,t) + u_{0,\varphi^2}(x,t).$$

$$D\eta_\infty = E\eta_\infty^2 - \left(E\eta_\infty\right)^2 = E\eta_\infty^2 - u^2(x,t) < +\infty \text{ т.е. } D\eta_{N_\varepsilon} < +\infty.$$

Из η_{N_ε} стандартным способом строится смешенная, но практически реализуемая оценка $\eta_{N_\varepsilon}^*$.

Пусть $\phi_1(x,0) = \varphi(x)$ $x \in R^n$ и $\left(x,t^*\right)$ - ближайшая к (x,t) точка $\partial\Omega$. В оценки

$$\eta_{N_\varepsilon} = \sum_{j=0}^{N_\varepsilon - 1} h\left(x^j,t^j\right) f\left(y^j,\tau^j\right) + u\left(x^{N_\varepsilon},t^{N_\varepsilon}\right)$$

заменяем $u\left(x,t^{N_\varepsilon}\right)$ на $\phi_1\left(x,t^{*N_\varepsilon}\right)$ и получаем

ISSN 3030-3907

$$\eta^*_{N_\varepsilon} = \sum_{j=0}^{N_\varepsilon - 1} h\left(x^j, t^j\right) f\left(y^j, \tau^j\right) + \phi_1\left(x, t^{*^{N_\varepsilon}}\right).$$

Теорема 3. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет условию Липщице и $A(\varepsilon)$ модуль непрерывности $u(x,t)$. Тогда случайная величина $\eta^*_{N_\varepsilon}$ является смещенной оценкой для $u(x,t)$. $D\eta^*_{N_\varepsilon}$ ограниченная функция параметра ε.

Доказательство. Так как $E_{(x,t)}\eta_{N_\varepsilon} = u(x,t)$, то

$$\left|u(x,t) - E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}\right| = \left|E_{(x,t)}\eta_{N_\varepsilon} - E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}\right| = \left|E_{(x,t)}u\left(x,t^{N_\varepsilon}\right) - E_{(x,t)}\phi_1\left(x,t^{*^{N_\varepsilon}}\right)\right| \le$$

$$\le E_{(x,t)}\left|u\left(x,t^{N_\varepsilon}\right) - u\left(x,t^{*^{N_\varepsilon}}\right)\right| = A(\varepsilon),$$

т.е $\eta^*_{N_\varepsilon}$ - смещенная оценка (смещение которой не перевосходит $A(\varepsilon)$)

$$D\eta^*_{N_\varepsilon} = E_{(x,t)}\left(\eta^*_{N_\varepsilon} - E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}\right)^2 = E_{(x,t)}\left(\eta^*_{N_\varepsilon} - \eta_{N_\varepsilon} + \eta_{N_\varepsilon} - u(x,t) + u(x,t) - E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}\right)^2 \le$$

$$\le 4E_{(x,t)}\left(\eta_{N_\varepsilon} - u(x,t)\right)^2 + 4E_{(x,t)}\left(\eta^*_{N_\varepsilon} - \eta_{N_\varepsilon}\right)^2 + 4E_{(x,t)}\left(u(x,t) - E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}\right)^2 \le$$

$$\le 4E_{(x,t)}\left(\phi_1\left(x,t^{*^{N_\varepsilon}}\right) - u\left(x^{N_\varepsilon}, t^{N_\varepsilon}\right)\right)^2 + 4D\eta_{N_\varepsilon} + 4A^2(\varepsilon) \le 8A^2(\varepsilon) + 4D\eta_{N_\varepsilon} < +\infty$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мильштейн Г.Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциалних уравнений.// Теория вероятностей и ее применения. Т.40. вып.3, 1995. С.657-665.

2. Тожиев Т.Х. Стохастические методы аппроксиматsii решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения неизотропной диффузии.// Деп.в ГФ НТИ ГКНТ № 2654-Уз 97.

3. Ермаков С.М., Расулов. А.С., Бакоев М.Т., Веселовская А.Я. Избранные алгоритмы метода Монте-Карло. Ташкент: Университет. 1992, 130 с.

4. Ермаков С.М., Некруткин В.В., СипинА.А. Случайные поцессы для решения классических уравнени математической физики. М.: Наука , 1984, 206 с.

5. Купцов Л.П. О свойстве среднего для обобщенного уравнения А.Н.Колмогорова // Дифф. Уравнения. 1983, Т. XIX, №2, с. 285-304.

6. Кушнер Г.Дж. Вероятностные методы аппроксиматsii стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнения. Москва. Наука. 1985.222 с.

ISSN 3030-3907

7. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Ситатистика случайных процессов. М.: Наука, 1975, 696 с.
8. Мильштейн Г. Н. Слабая аппроксиматsiя решений систем стохастических дифференциалних уравнений.// Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т.XXX, ВЫП.4. С. 706-721.
9. Мильштейн Г. Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциалних уравнений.// Теория вероятностей и ее применения. Т.40. вып.3, 1995. С.657-665.
10. Расулов А.С., Бакоев М.Т. Рашение смешанной задачи для некоторых квазилинейных параболических уравнений методы Монте-Карло.// Тез. Докл. I-й Всемирн. Конгр. Обшества Бернулли 7-14 сентября. 1986 Г. Ташкент. С 473.
11. Сабельфельд К. К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. Новосибирск. Наука. 1989,280 с.
12. Сабельфельд К. К. Вероятностные представление для систем эллиптических уравнений // Докл.РАН. 1995 . т.341, №1 , с.594-598.

ISSN 3030-3907