ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА В ОДНОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

Жумаев Жура
Бухарского государственного университета доцент
Очилов Бехзод Гани угли
Магистранты Бухарского государственного университета
Самадов Бобир Баходирович
Магистранты Бухарского государственного университета

Аннотация. В статье численно изучено задача теплопроводности без внутренных источников для разных материалов. Для этого одномерное уравнение теплопроводности записан неявно в конечных разностях и применена метод прогонки. Составленный алгоритм реализована в среде DELPHI, для рисования графиков использована система MathCAD. Изучено процесс теплопроводности для разных материалов с разными свойствами и сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова. Моделирование, тепловой поток, уравнение теплопроводности, коэффициент теплопроводности, плотность, теплоемкость, конечные разности, метод прогонки, нестационарная задача, компьютерный модель, математический модель, уравнение в частных производных.

Annotatsiya. Maqolada ichki manbaga ega bo’lmagan bir o’lchovli turli materialli sohalarda issiqlik tarqalish masalasi sonli o’rganilgan. Buning uchun bir o’lchovli holdagi issiqlik tarqalish tenglamasi boshlang’ich va chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda oshkormas holda chekli ayirmalarda yozilib, haydash usulidan foydalanilgan. Tuzilgan algoritm DELPHI muhitida dasturlashtirilib, grafiklarni chizish uchun MathCAD tizimidan foydalanilgan. Turli xossalarga ega bo’lgan materiallarda turli temperatura va vaqt mobaynida issiqlik tarqalish masalasi o’rganilib, tegishli xulosalar chiqarilgan.

Kalit so’zlar. Modellashtirish, issiqlik oqimi, issiqlik tarqalish tenglamasi, issiqlik o’tkazish koeffisienti, zichlik, solishtirma issiqlik sig’imi, chekli ayirmalar, haydash usuli, nostasionar masala, komp’yuter modeli, matematil model, xususiy hosilali differensial tenglama.

Annotation. The article numerically studies the problem of heat conduction without internal sources for different materials. To do this, the one-dimensional heat equation is written implicitly in finite differences and the sweep method is used. The compiled algorithm was implemented in the DELPHI environment the MathCAD system was used to draw graphs. The process of heat transfer for

ISSN 3030-3907

different materials with different properties has been studied and appropriate conclusions have been drawn.

Keywords. Modeling, heat flow, heat equation, thermal conductivity coefficient, density, heat capacity, finite differences, sweep method, unsteady problem, computer model, mathematical model, partial differential equation.

Введение.

Процессы теплопроводности наблюдаются в различных объектах сельского хозяйства и промышленности. Изучение таких процессов тесно связано с вопросами экономии источников энергии, генерирующих тепло [1]. При этом эксперименты на приборах проводятся в ограниченном количестве случаев и требуют значительных затрат. Некоторые эксперименты очень сложно проводить. В таких случаях полезно математическое моделирование этих процессов [1-2]. Результаты, полученные на основе математической модели, помогают проектировщикам получить полную картину объекта и процессов.

Метод моделирования широко применяется в современной науке. Он облегчает процесс исследования, а в некоторых случаях становится единственным инструментом для изучения сложных объектов. Моделирование особенно важно при изучении абстрактных объектов, объектов, расположенных на большом расстоянии, а также объектов очень малых размеров. Метод моделирования применяется также в физике, астрономии, биологии и экономике [3].

Вопросы распределения тепла рассматривались в исследованиях [4-8]. Практически во многих случаях вопросы теплопроводности рассматриваетя в общем виде, без учета характера среды, в которой происходит процесс[4-8]. Подобные процессы происходят в вычислительных устройствах, стенах жилых помещений и т. д. Поэтому моделирование таких процессов с учетом особенностей объекта теплоотдачи является актуальной задачей.

Методика.

Рассмотрим задачу о распределении тепла в тонком цилиндрическом стержне длиной L. Оба конца этого стержня могут быть теплопроводными, или тепловой поток может быть обеспечен по некоторому правилу (рисунок 1). Это задается граничными условиями.

ISSN 3030-3907

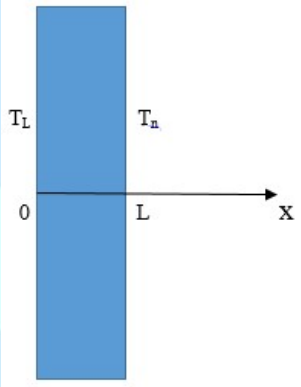


Рис.1. Геометрическая постановка задачи.

В соответствии с постановкой задачи одномерное уравнение теплопроводности выглядит следующим образом:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+Q(x),\qquad 0<x<l;t>0, \qquad (1)$$

Здесь c и ρ теплоемкость и плотность вещества соответственно, λ-коэффициент теплопроводности, $Q(x)$ – источник тепла, который можно разместить на стержне.

Начальное условие задачи:

$$t:=0:\quad T=T_0,\quad 0\le x\le L;$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} x=0:\ T=T_l,\ t>0; \\ x=L:\ T=T_r,\ t>0; \end{cases} \qquad (2)$$

Для простоты считаем, что коэффициент теплопроводности λ постоянный, тогда уравнение (1) будет иметь следующий вид:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+Q(x),\qquad 0<\mathrm{x}<\mathrm{L},$$

Делим обе стороны этого уравнения на ρc и имеем следующее:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{Q(x)}{\rho c} \qquad (3)$$

Теперь проверим правильность единиц измерения в этом уравнении.
Для этого запишем единицы измерения для каждого члена уравнения:

Для температуры ${}^0C$, для времени s, для λ, т.е. для коэффициента теплопроводности $Bt/\left(m\cdot{}^0C\right)$, для плотности ρ kg/m^3, для удельной теплоемкости c $J/\left(kg\cdot{}^0C\right)$, для координаты x m, для источника тепла $Q(x)$ $\frac{kg}{m\cdot s^3}$.

Известно, что единица измерения Bt - $\frac{kg\cdot m^2}{s^3}$. Тогда единица измерения λ будет равень:

ISSN 3030-3907

$$\lambda \to Bt/\left(m\cdot {}^{0}C\right)\to \frac{kg\cdot m^2}{s^3}/\left(m\cdot {}^{0}C\right)\to \frac{kg\cdot m}{s^3\cdot {}^{0}C}$$

Единица измерения J при удельной теплоемкости:

$$J\to H\cdot m\to \frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot m\to \frac{kg\cdot m^2}{s^2}$$

Тогда единица измерения удельной теплоемкости c будет иметь вид:

$$c\to \frac{\frac{kg\cdot m^2}{s^2}}{\left(kg\cdot {}^{0}C\right)}\to \frac{m^2}{s^2\cdot {}^{0}C}$$

Теперь определим единицу измерения члена $\frac{\lambda}{\rho c}$ в уравнении (3):

$$\frac{\lambda}{\rho c}\to \frac{Vt/(m\cdot {}^{0}C)}{(kg/m^3)\cdot\left((Vt\cdot s)/(kg\cdot {}^{0}C)\right)}=\frac{m^2}{s}$$

Таким образом, единица измерения $\frac{\lambda}{\rho c}$ имеет вид $\frac{m^2}{s}$ и он обозначается как $\frac{\lambda}{\rho c}=\alpha$ и называется коэффициентом температуропроводности.

Теперь выведем единицу измерения для $\frac{Q(x)}{\rho c}$ в уравнеии (3):

$$\frac{Q(x)}{\rho c}\to \frac{\frac{kg}{m\cdot s^3}}{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{s^2\cdot {}^{0}C}}\to \frac{{}^{0}C}{s}$$

Теперь выведем единицу измерения для $\frac{\partial T}{\partial t}$: $\frac{\partial T}{\partial t}\to \frac{{}^{0}C}{s}$

Выведем единицу измерения для $\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$:

$$\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\to \frac{m^2}{s}\cdot\frac{{}^{0}C}{m^2}\to \frac{{}^{0}C}{s}$$

Из вышеприведенных видно, что все члены уравнения (3) имеет одинаковую единицу измерения $\frac{{}^{0}C}{s}$.

Теперь, чтобы дать полное математическое описание (3), необходимо дополнительно включить в это уравнение однозначные условия, в том числе геометрические, физические, начальные и граничные условия.

Геометрические условия изучаемого процесса определяют форму и размеры объекта. Физические условия определяют теплофизические характеристики тела. Начальные условия по времени описывают распределение температуры в теле в начальный момент времени.

ISSN 3030-3907

Для полной математической постановки рассматриваемой задачи необходимо также привести физические условия однозначности.

Для рассматриваемого стержня выберем материал, например железо. Вычислим для него значения коэффициента температуропроводности при следующих данных:

$$\lambda = 46\,Bt/\left(m\cdot{}^0C\right),\ \rho = 7800kg/m^3,\ c = 460\,J/\left(kg\cdot{}^0C\right)$$

Вставляя эти значения в выражение $\frac{\lambda}{\rho c}$ получим:

$$\frac{46}{7800\cdot 460} = 1{,}282\cdot 10^{-5}$$

Для обычного кирпича члены выражения $\frac{\lambda}{\rho c}$ равны следующим значениям :

$$\lambda = 0{,}7\,Bt/\left(m\cdot{}^0C\right),\ \rho = 1500kg/m^3,\ c = 750\,J/\left(kg\cdot{}^0C\right)$$

Поставляя их в выражение $\frac{\lambda}{\rho c}$ получим:

$$\frac{0{,}7}{1500\cdot 750} = 6{,}2\cdot 10^{-7}$$

Таким образом, температуропроводность кирпича меньше, чем у железа.

Таким же образом, для материала медь члены выражения $\frac{\lambda}{\rho c}$ равны следующим:

$$\lambda = 384\,Bt/\left(m\cdot{}^0C\right),\ \rho = 8800kg/m^3,\ c = 381\,J/\left(kg\cdot{}^0C\right)$$

Подставляя эти значения в $\frac{\lambda}{\rho c}$ получим:

$$\frac{381}{8800\cdot 3810} = 0{,}00015$$

Теперь для решения задачи разделим стержень, являющийся объектом процесса, на N-1 равных участков по его длине и определим узлы.

Обозначим значение температуры в i – ой узловой точке при моменте времени $t = t_n = n\cdot\tau$ как $T(x_i,t_i) = T_i^n$. Здесь τ – шаг интегрирования по временной координате; n – номер шага по времени.

В этом исследовании рассмотрим задачу, когда отсутствует источник теплоты, т.е. $Q(x) = 0$. В (1) заменим члены в уравнении с их конечно-разностными аналогами. Для этого воспользуемся неявной схемой [9-10]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

ISSN 3030-3907

Заменяя частные производные соответствующими конечными разностями, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\rho c\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}=\lambda\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}\right),\qquad i=2,3,...,N-1,n\geq 0 \qquad (4)$$

Здесь $N-$ количество узловых точек по оси x.

Выбранный шаблон аппроксимации частных производных показаны на рис.2.

На рисунке 2 наглядно показано, что в используемой четырехточечной неявной разностной схеме три точки берутся в новом временном слое и одна точка в предыдущем временном слое.

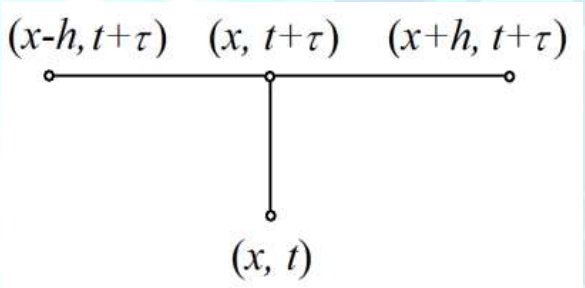


Рис.2. Шаблон четырехточечной, двухслойной конечно-разностной схемы.

Причина, по которой этот метод аппроксимации производных называется неявным, заключается в том, что температурное поле в новом временном слое выражено неявно, то есть для их определения используется метод прогонки.

Выполнив некоторые преобразования в уравнении (4), его можно обобщить следующим образом:

$$A_i\cdot T_{i+1}^{n+1}-B_i\cdot T_i^{n+1}+C_i\cdot T_{i-1}^{n+1}=F_i \qquad i=1,..,N-1 \qquad (5)$$

Здесь

$$A_i=C_i=\frac{\lambda}{h^2},\qquad B_i=\frac{2\lambda}{h^2}+\frac{\rho c}{\tau},\qquad F_i=-\frac{\rho c}{\tau}T_i^n$$

Система (5) имеет трехдиагональную структуру. Поэтому, поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу, необходимо решать систему (5) на каждом временном шаге.

Предположим, что есть последовательностьь таких чисел α_i и β_i $(i=1,2,...,N-1)$ что для них выполняется следующее равенство

$$T_{i-1}^{n+1}=\alpha_{i-1}\cdot T_i^{n+1}+\beta_{i-1} \qquad (6)$$

то есть тем самым двухслойное четырехточечное уравнение (4) становится двухточечным уравнением первого порядка (6).

ISSN 3030-3907

В уравнении (6) уменьшая индекс на единицу получим $T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} \cdot T_i^{n+1} + \beta_{i-1}$ и подставляя это выражение в (5) получим:

$$A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot \alpha_{i-1} \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot \beta_{i-1} = F_i,$$

Отсюда находим T_i^{n+1}

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}} T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i \cdot \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}} \qquad (7)$$

При сравнении (7) с равенством (6) для всех $i = 2,3,...,N-1$ коэффициенты α_i и β_i будет равны:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}, \qquad \beta_i = \frac{C_i \cdot \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}. \qquad (8)$$

Учитывая (8) уравнение (7) примет следующий вид:

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i \qquad (9)$$

При прямом ходе метода прогонки при $i = 1,2,3,...,n-1$ находятся все α_i и β_i. При этом для $i = 1$ значения α_1 и β_1 находятся из левого граничного условия.

Таким образом, для нашей задачи применим метод прогонки.

Из (2) в левой границе $x = 0$: $T = T_l$, $t > 0$. Тогда из (9) при $i = 1$ получим:

$$T_1^{n+1} = \alpha_1 T_2^{n+1} + \beta_1 \qquad (10)$$

Отсюда

$$\alpha_1 = 0, \ \beta_1 = T_l$$

Учитывая (10) для остальных $i = 2,3,...,N-1$ используя (9) определим остальные значения α_i и β_i.

Из граничных условий (2) для правой границы известно $x = L$: $T_N = T_r$. Если вставим в (9) $i = N-1$, тогда

$$T_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} T_N^{n+1} + \beta_{N-1} \qquad (11)$$

В (11) неизвестное T_N^{n+1} - определяется из правого граничного условия: $T_N^{n+1} = T_r$, а для $i = 2,3,...,N-1$ все α_i и β_i определены из (9), теперь для $i = N-1,..,1$ с помощью (9) находим остальные T_i^{n+1}.

На основе данного алгоритма в среде Delphi [11] был создан программный продукт, а результаты записаны в массивы и получены графики в математическом пакете Mathcad [12-13].

На рисунке 3 показан процесс распределения температуры в стержне, изготовленном из железа, длиной один метр в различные моменты времени. На диаграмме показано, что если к концу стержня приложить температуру

ISSN 3030-3907

40°C, а к середине — 20°C, то примерно через 15 минут тепло, приложенное с левого края, будет ощущаться в середине стержня.

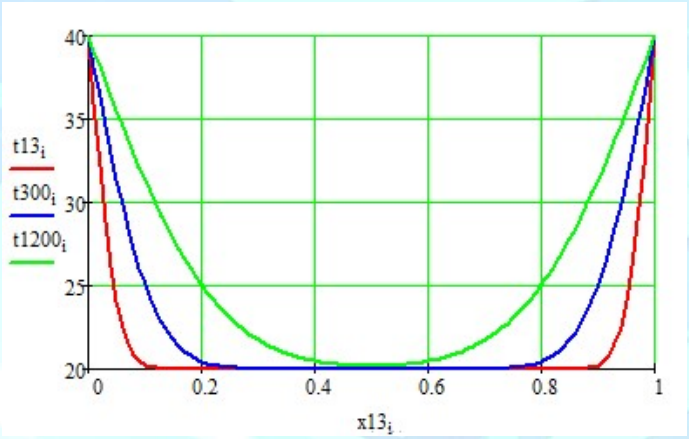


Рис.3. Процесс распределения тепла в стержне длиной в 1 метр из железа через 1 минуту, 5 минут и 15 минут.

Процесс распределения тепла в различных материалах можно увидеть на рисунке 4. Первый график на рисунке 4 показывает процесс распределения тепла в железном стержне, а второй график показывает процесс распределения тепла в медном стержне. Графики на рисунке показывают, что скорость распределения тепла в медном стержне значительно выше.

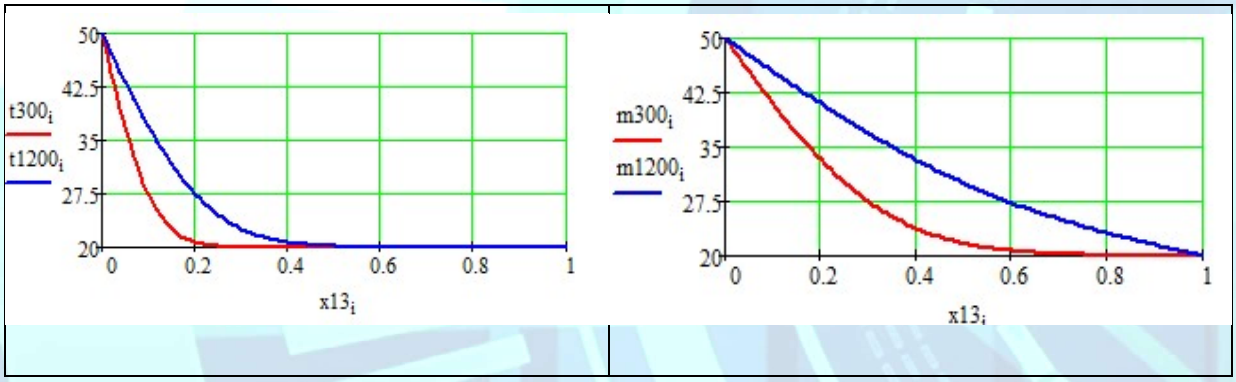


Рис.4. Сравнение теплопроводности в железных и медных стержнях через 5 минут и 15 минут.

Заключение.

В данной статье теоретически исследована задача распределения тепла в одномерной стержне без внутренних источников с учетом термодинамических свойств материала стержня. При этом выбранной в качестве математической модели нестационарное уравнение теплопроводности записывалось в неявных шаблонных конечных разностях, а полученная система уравнений решалась методом прогонки с учетом начальных и граничных условий. В качестве исходных данных использовались параметры материалов железа и меди, а процессы, происходящие в одномерных объектах этих материалов, сравнивались между

ISSN 3030-3907

собой. Разработанный алгоритм и программное обеспечение могут быть использованы в практических задачах, связанных с распределением тепла.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Zohidov R.A., Alimova M.M., Mavjudova Sh.S. Issiqlik texnikasi. Darslik. T.: “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati”. 2010. -200 b.
2. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ,2007. – 172 с.
3. Дьяконов В.Г., Лонщаков О.А. Основы теплопередачи. Учебное пособие//КНИТУ, Казань, 2011. -230 с.
4. Рындин Е.А., Куликова И.В., Лысенко И.Е. Основы численных методов: теория и практика// Электронное учебное пособие. Таганрог. 2015. 216 с.
5. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х томах. М: «Мир», 1990. 344 с.
6. Jumayev J., Mustapakulov Ya., Kuldoshev H. Numerical algorithm for modeling turbulence in a jet with diffusion combustion// 14th international Conference on Application of information and Communication technologiyes(AICT). Conference Proceedings.(Tashkent, 7-9 okt. 2020). pp. 1-4 DOI 10.1109/AICT50176.2020.9368857
7. Jumayev J., Shirinov Z., Kuldashev H. Computer simulation of the convection process near a vertically located source//International conference on information Science and Communikations Technologiyes (ICISCT) 4-6 november. 2019. Tashkent. Conference Proceedings. pp.635-638.
DOI: 10.1109/ICISCT47635.2019.9012046
8. Жумаев Ж., Тошева М.М. Моделирование стационарной теплопроводности при свободной конвекции в ограниченном обьеме// Universum. Технические науки. Выпуск 4(97). Апрел, 2022.Часть 3. С. 34-38. http://7universum.com/ru/tech/archive/category/497
9. Бейбалиев В.Д., Шабанова М.Р. Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка//Вест. Сам.гос.техн.ун-та. Сер.физ.мат.науки. -2010. -№ 5(21). –с. 244-251.
10. Крайнов А.Ю., Рыжих Ю.Н., Тимохин А.М. Численные методы в задачах теплопереноса: учебно-методическое пособие. Томск. Том. ун-т, 2009. 114 с.
11. Nazirov Sh.A., Musayev M.M. va b. Delphi tilida dasturlash asoslari. O’quv qo’llanma. Toshkent. “G’afur-G’ulom”, 2008. 277 bet.
12. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: Учебное пособие.-СПб.: “Лань”.2008.-352 с.

ISSN 3030-3907

13. Жумаев Ж. Решение математических задач в пакетах математических программ. Учебное пособие. Бухара. «Дурдона», 2020. 240 с.

ISSN 3030-3907